

u

X K03419

ACTA PHYSICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

Z. GYULAI, L. JÁNOSSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT

P. GOMBÁS

TOMUS IV

FASCICULUS I



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1954

ACTA PHYS. HUNG.

ACTA PHYSICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FIZIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21.

Az *Acta Physica* orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a fizika tárgyköréből.

Az *Acta Physica* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendőek:

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az *Acta Physica* előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány-u. 21. Bankszámla 04-878-111-46), a külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankszámla: 43-790-057-181 sz.) vagy külföldi képviselőinél és bizományosainál.

»*Acta Physica*« публикует трактаты из области физических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»*Acta Physica*« выходит отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена »*Acta Physica*« — 110 форинтов за том. Заказы принимает Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Текущий счет № 04-878-111-46), а для заграницы, предприятие по внешней торговле книг и газет »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

ACTA PHYSICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUUVANTIBUS
Z. GYULAI, L. JÁNOSSY, I. KOVÁCS, K. NOVOBÁTZKY

REDIGIT
P. GOMBÁS

TOMUS IV



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST, 1955

ACTA PHYS. HUNG.

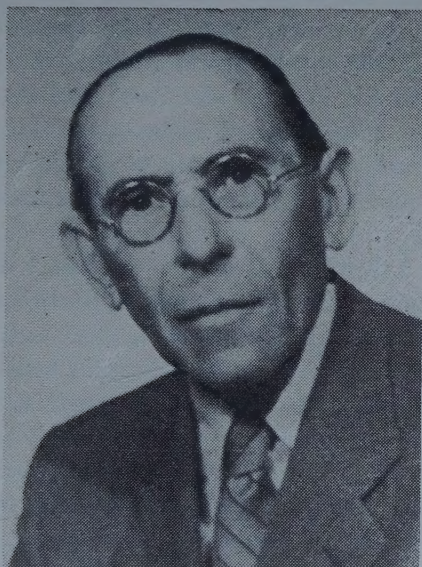
INDEX

Tomus IV

Z. Gyulai : P. Selényi	1
P. S. Faragó and G. Groma: Reflex Oscillators. — П. Ш. Фараго и Г. Грома: Отражательные осцилляторы	7
P. S. Faragó and G. Marx: Quantum Effects in the Interaction between Free Electrons and Electromagnetic Fields. — П. Ш. Фараго и Г. Маркс: Квантовые явления при взаимодействии свободных электронов с электромагнитными полями	23
Th. Neugebauer: Lichtzerstreuung und Hubbleeffekt. — Т. Нейгебайер: Рассеяние света и эффект Хаббл	31
S. N. Biswas: Fredholm Theory of Heitler's Integral Equation. — С. Н. Бисвас: Применение теории Фредголма к интегральному уравнению Гейтлера	49
G. Szigeti, G. T. Bauer, J. Weiszburg: Mikrophotometrische Messungen an elektrolumineszenten Siliziumkarbidkristallen. — Г. Сизети, Г. Т. Бауер, Я. Вейсбург: Микрофотометрические измерения на электролюминесцентных кристаллах карбида кремния	57
G. Szigeti: Über die durch Gleichstrom angeregte Elektrolumineszenz von Siliziumkarbidkristallen — Г. Сизети: Об электролюминесценции кристаллов карбида, возбужденной постоянным током	65
G. Györgyi: Die Theorie der Schwingungen der auf einen Torsionsdraht aufgehängten Waage nach Eötvös—Selényi. — Г. Дьёрдьи: Теория колебания крутильных весов (Установка Этвеша—Шеленьи)	79
Gy. Gergely: Band-Width Problems in the Investigation of Relaxation Processes ...	87
Á. Bardócz: Untersuchungen über Lichtquellen für Spektralanalyse IV. Ein elektrisch gesteuerter Funkenerzeuger. — А. Бардоу: Искровой возбудитель с электроническим управлением для целей спектрального анализа	91
G. Györgyi: Die Bewegung des Energiemittelpunktes und der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Dielektrika. — Г. Дьёрдьи: Движение энергетического центра и тензор импульса энергии в диэлектриках	121
I. Fényes: Über das Divergenzproblem der W. K. B. Methode. — И. Феньеш: О проблеме расходимости метода В. К. Б.	133
F. Berencz: A New Method for the Calculation of the Energy of the Hydrogen Molecule. — Ф. Беренц: Об одном новом методе вычисления энергии связи водородной молекулы	149
G. Szamosi: On the Quantum Statistics of Nucleons. — Г. Самоши: О квантовой статистике нуклонов	155
Herbert W. Franke: Ein Strömungsmodell der Wellenmechanik. — Х. В. Франке: Гидродинамическая модель волновой механики	163
L. Jánosy and D. Kiss: On the Measurement of Efficiency of G.-M.-Counters. — Л. Яноши и Д. Яшиш: Измерение эффективности счетчиков Гейгера-Мюллера	173

<i>J. I. Horváth</i> : An Asymptotical Method for the Calculation of Eigenfunctions.....	183
<i>P. Gombás</i> : Erweiterung der Hartree—Fock'schen Gleichungen durch die Korrelation der Elektronen	187
<i>Z. Gyulai</i> : Durch Kristalle verursachte Zerstörungswirkungen in porösen Materialien. — <i>З. Дюлаи</i> : Разрушающее действие растущих кристаллитов в пористых материалах	189
<i>Z. Morlin</i> : Beitrag zur Untersuchung der Rekristallisationsvorgänge. — <i>З. Морлин</i> : Некоторые замечания к вопросу процессов рекристаллизации	197
<i>P. Román</i> : Quantelung des elektromagnetischen Feldes in einer neuartigen Darstellung. — — <i>П. Роман</i> : Квантование электромагнитного поля в одном новом представлении	209
<i>G. Szamosi and G. Marx</i> : Classical Motion of the Nucleons in a Scalar Meson Field. — <i>Г. Самоши и Г. Маркс</i> : Движение нуклона в скалярном мезонном поле ...	219
<i>R. Pauncz</i> : Investigation of a New Quantum-Mechanical Method of Approximation. — <i>Р. Паунц</i> : Исследование эффективности одного нового квантово-механического приближенного метода	237
<i>Zs. Náray</i> : Determination of Cathode Sensitivity Distribution of Photomultipliers. — <i>Ж. Нараи</i> : Определение распределения чувствительности катодной поверхности фотомножителя	255
<i>P. Gombás, E. Mágori, B. Molnár, É. Szabó</i> : Die statistische Theorie des Atomkerns. III. Teil. — <i>П. Гомбаш, Э. Магори, Б. Мольнар, Э. Сабо</i> : Статистическая теория атомного ядра. ч. III.	267
<i>Á. Budó und I. Kovács</i> : Über den $^4\Pi$ -Zustand des O_2^+ -Moleküls — <i>А. Будо и И. Ковач</i> : О состоянии $^4\Pi$ молекулы O_2^+	273
<i>M. A. Ziegler</i> : Calculation of Pairing Energy by Means of the Eigenfunctions of the Yukawa Potential.....	293
<i>G. Marx und K. Nagy</i> : Der Energie-Impuls-Tensor der Strahlung in Dielektrika	297
<i>A. Адам, Л. Яноши, П. Варга</i> : Исследование когерентных фотонных потоков методом совпадений. — <i>A. Ádár, L. Jánosy and P. Varga</i> : Coincidences between Photons Contained in Coherent Light Rays.....	301
<i>F. Berencz</i> : Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven. — <i>Ф. Беренц</i> : Замечания к анализу кривых абсорбции	317
<i>K. Nagy</i> : Quantummechanical Forces Acting on Photons. — <i>К. Надь</i> : Действие квантово-механических сил на фотоны	327
<i>L. Jánosy</i> : Remarks on the Foundation of Probability Calculus. — <i>Л. Яноши</i> : Замечания относящиеся к основам теории вероятности	333
<i>J. Aczél</i> : A Solution of Some Problems of K. Borsuk and L. Jánosy. — <i>Я. Ацель</i> : Решение некоторых проблем К. Боршука и Л. Яноши	351
<i>E. Fenyves</i> : The Efficiency of Self-Quenching G. M. Counters for Cosmic Ray Particles. — <i>Э. Феньвеш</i> : Вероятность срабатывания самогасящихся счетчиков Г.-М. для частиц космического излучения	363
<i>É. Kisdi-Kosztó</i> : On Some Problems of the Operation of Microtrons	377

P. SELÉNYI



Am 21. März dieses Jahres trugen wir die sterbliche Hülle von P. Selényi, korrespondierendem Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, zu Grabe. Die symbolische Wertschätzung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gelangte auch dadurch zum Ausdruck, dass sich die letzte Ruhestätte des hervorragenden Verstorbenen der ungarischen Physik neben dem Grab von Roland Eötvös befindet. Beim Begräbnis umstanden ausser seinen engeren Familienmitgliedern auch die Mitglieder seiner weiteren Familie sein Grab, von den ältesten Physikern bis zur jüngsten Generation, den Universitätshörern der Physik. Noch fällt es uns schwer, über ihn im objektiven Tone der Erinnerung zu sprechen.

Das Leben Selényis war das Leben des bescheidenen Gelehrten, doch blieb es nicht unberührt von den Auswirkungen der Politik. In dieser stürmischen Atmosphäre liess sich indessen stets das Gedicht von Horaz auf ihn anwenden :
»Iustum et tenacem propositi virum ...«

Paul Selényi wurde am 17. November 1884 in Adony, einer Ortschaft in Transdanubien, als Sohn einer bürgerlichen Familie geboren. Seine Mittelschulstudien absolvierte er in Budapest, im Barcsay-Gymnasium im VII. Bezirk, an dem damals hervorragende Lehrkräfte wirkten. Danach absolvierte er die Universität in Budapest, wo er im Jahre 1907 das Mittelschullehrerdiplom für Mathematik und Physik erlangte. Schon als Universitätshörer zeigte sich bei ihm eine besondere Begabung und Neigung zur Physik, die von seinen Lehrern I. Fröhlich und J. Klupáthy gepflegt und gefördert wurden. So wurde er schon 1907 zum Assistenten am II. Institut für Physik der Budapester Universität ernannt und behielt diese Stellung drei Jahre hindurch. Im Jahre 1910 bestand er sein Doktorexamen aus Philosophie. Da seine Begabung und sein Talent aufgefallen waren, verbrachte er das Studienjahr 1912–1913 auf Grund eines staatlichen Stipendiums in Göttingen und Berlin.

Die Jahrhundertwende darf als die Zeit bezeichnet werden, in der die Ausbildung der ersten ungarischen Physikergarde einsetzte. Dieser Prozess nahm unter dem Einfluss der grossen wissenschaftlichen Erfolge und der streng logischen und konsequenten wissenschaftlichen Persönlichkeit von Roland Eötvös seinen Anfang.

Bis dahin hatte in Ungarn der Gelehrte — in erster Linie der Naturwissenschaftler — eher als ein Sonderling gegolten. Die Ereignisse der politischen Geschichte verhinderten mit voller Absicht, dass sich auch in Ungarn das Bewusstsein über die Bedeutung der Beziehungen zwischen dem Wirtschaftsleben und den Wissenschaften entwickelte, obwohl die prophetischen Worte von Széchenyi mehr als fünfzig Jahre vorher über das Land hinweggebraust waren: Das Volk, das ohne Wissenschaft lebt, wird zugrunde gehen!«

Die monumentalen Erfolge Eötvös', die in 1906 am internationalen geodätischen Kongress in Budapest auch im Inland greifbare Formen annahmen, wirkten trotz seiner Verslossenheit in suggestiver Weise auf die jungen Studenten der Physik und gestalteten in ihnen den Begriff und die Perspektive einer hohen — im europäischen Sinne genommenen — Wissenschaft aus. Diese Wirkungen fielen bei Selényi auf fruchtbaren Boden. Wer ihn in der letzten Zeit kennen lernte, war vom Reichtum seines Gemütes, das ihn ausser seinen exakten physikalischen Gedankengängen kennzeichnete, mit Recht beeindruckt. Diese edle Seite seiner Persönlichkeit offenbarte sich unter anderen auch in einigen Gedichten aus seiner Jugendzeit, von denen sich eines gerade auf Eötvös bezog, oder darin, dass er in der Bewegung eines vom Spiegel der Waage reflektierten Lichtfleckes im dunklen Zimmer den Geist Newtons zu erkennen glaubte. Er war eine wahre Künstlernatur, was auch in seinen zarten Aquarellen und in seiner grossen Liebe zur Musik zum Ausdruck kam.

Der Grundpfeiler seiner Persönlichkeit war aber seine grosse und tiefe Liebe zur Physik. Dies zeigte sich schon darin, dass er sich sofort nach seiner Diplomarbeit (die über die Polarität des diffraktierten Lichtes handelte) einem optischen

Problem zuwandte, das mit der Zeit zu einem der grundlegenden Probleme der modernen Quantenphysik wurde. Diese Arbeit erschien unter dem Titel »Über Lichtzerstreuung im Raume Wienerscher Interferenzen« in den »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn« (XXVII, 1909, Heft 1 und 2) sowie auszugsweise in den »Annalen der Physik« [(4), 35, 444, 1911]. Die von ihm in dieser Arbeit gewonnene Erkenntnis besteht darin, dass sich die Elementarstrahlung der Lichtquellen genau so verhält wie eine aus einem Hertzschen Dipol ausgehende, in jeder Richtung kohärente Kugelwelle. Diese Feststellung ist in der Quantentheorie — im Gegensatz zu dem Bilde der Einsteinschen Nadelstrahlung — von Bedeutung. Später stellte Kossel an Röntgenstrahlen eine ähnliche Erscheinung fest.

Im zweiten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts begann sich die erste junge Generation der ungarischen physikalischen Forscher zu einer ersten, lockeren Organisation zusammenzuschliessen. Den Anfang machte Gy. Zemplén, der in den Spalten der »Mathematikai és Fizikai Lapok« (Mathematische und Physikalische Blätter) einzelne jüngere Physiker zu Wort kommen liess, ihnen Aufgaben stellte und sie mit der Abfassung kleinerer Referate betraute. In dieser anfänglichen Entwicklung war Selényi der verheissungsvollste. Doch der erste Weltkrieg setzte diesen schönen Anfängen ein Ende. Zemplén fiel auf dem Schlachtfeld, der junge Bartoniek verscholl, Selényi wird nach 16 Monaten Frontdienst im Jahre 1917 aus gesundheitlichen Gründen in das Hinterland versetzt. Doch auch im Felde blieb Selényi Physiker und sendet von hier seinem Redakteur Arbeiten ein. An der italienischen Front beschäftigt er sich mit der Lichtreflexion negativ gekrümmter Flächen. Bei der Artillerie stellt er akustische Beobachtungen an und wird im Jahre 1918 an die Wiener Universität kommandiert, um seine eventuell auch für das Militär brauchbare akustische Erfindung auszuarbeiten.

Die nach Beendigung des ersten Weltkrieges auftretende politische Gestaltung liess auch in der Entwicklung der ungarischen Physik ihre Spuren zurück. Selényi kehrt an die Budapester Universität zurück. Er bewirbt sich um seine Habilitation als Privatdozent. Nach dem Tode Eötvös' wird er stellvertretenderweise mit der Abhaltung der Vorträge betraut.

Nach dem Sturze der Räterepublik bleibt das Gesuch seiner Habilitation unerledigt und er ist gezwungen, eine Stellung in der Industrie anzunehmen. Nach mehreren schwer durchgekämpften Jahren bei der Versuchstation der Post, bei der Firma Erdélyi und Szabó bildete sich in der Vereinigten Glühlampenfabrik in Ujpest unter der Leitung von I. Pfeiffer eine industrielle Forschungsgruppe, deren physikalischer Teil Selényi unterstellt wurde. Zwar war es für ihn schmerzlich, dem Unterricht entsagen zu müssen, doch gelangte er in weit bessere technische Arbeitsverhältnisse, als die damaligen Universitäten zu bieten vermochten. Natürlich bestand seine Hauptaufgabe in der Lösung industrieller Probleme. Nun offenbarte sich eine neue Seite der reichen Persön-

lichkeit Selényis, nämlich sein starker Wille. Trotzdem er sich in seinen politischen Idealen getäuscht und in seinen wissenschaftlichen Ambitionen gefährdet und behindert sah, rückte er nicht von seinen edlen Zielen ab. Er ging nicht ins Ausland, wie es viele in diesen Zeiten taten, sondern widmete sich ganz der produktiven Arbeit. Jetzt befand sich die Forschernatur Selényis sozusagen in ihrem Element. Er war es, der eigentlich die Grundlagen der industriellen physikalischen Forschung in Ungarn legte, wobei ihm die zahlreichen industriellen Probleme auch Gelegenheit zur Erkenntnis rein physikalischer Erscheinungen boten. Nahezu zwanzig Jahre arbeitete er in der Industrie und zog hierbei eine kleine Gruppe von Physikern auf.

Als hervorragender Forscher trug er mit seinen Ratschlägen zu vielen Verbesserungen in der Produktion der Fabrik bei. Das Hauptproblem war aber die Erzeugung der Glühlampe, so dass er sich am eingehendsten mit dieser Frage beschäftigte. So untersucht er die sich in der Glühlampe abspielenden Elektronen- und Ionenprozesse und arbeitet zusammen mit Rostás ein Schnellverfahren zur Untersuchung der Gas oder kein Gas enthaltenden Glühlampen aus.

Zusammen mit I. Patai konstruiert er einen Apparat zur Messung der Wärmeausdehnung des Glases.

Zu dieser Zeit war die Photozelle noch neu. Selényi bringt durch die Glaswand auf elektrolytischem Wege Natrium in das Vakuum ein, ein Verfahren, das sich in der Praxis gut bewährte. Solche Arbeiten von ihm, wie diese, wurden von der Fabrik patentiert. Wer mit Photozellen gearbeitet hat, weiss wie wichtig es ist, die Empfindlichkeit der Zellen ins Rote auszudehnen. Dies gelang auch mit Hilfe von Glimmentladungen, doch war die Wirkung gewöhnlich nicht beständig. Selényi erreichte, dass diese Ausdehnung der Empfindlichkeit beständig wurde. Bei solchen und ähnlichen Arbeiten wuchsen neben ihm neue Physiker auf, wie M. Forró, G. Vészi, F. Kőrösi.

Zu den grossen Erfindungen dieser Zeit gehören die Photoelemente, und unter seiner Leitung führt die Tungsram-Fabrik auch die Erzeugung von Selen-Photoelementen ein. Die Ausarbeitung des Wirkungsprinzips der Selen-Photoelemente fällt auf das Gebiet der reinen Forschung und hier dringt Selényi in die moderne Halbleiterforschung ein. Er befasst sich auch mit der Verbesserung der objektiven photometrischen Verfahren.

Zu dieser Zeit war das Problem der Television bereits ein viel diskutiertes Problem. Selényi hatte einen hervorragenden Einfall, um die Spur des Kathodenstrahles in einer Kathodenstrahlröhre sichtbar zu machen: er bringt eine Isolierplatte in die Röhre ein, streut auf diese Lycopodiumpulver, wodurch das Bild sichtbar wird. Eine andere Variante dieses Versuches ist, dass der Kathodenstrahl auf die Glaswand fällt, und dass das auf die äussere Wand gestreute Pulver das Bild sichtbar macht. Dieses Verfahren, das unter dem Namen »Elektrographierung« patentiert wurde, gehörte zu seinen Lieblingsthemen und er hielt es für seine beste Erfindung. Er hoffte, dass es mit diesem, allerdings

entsprechend weiterentwickelten Verfahren gelingen werde, das bei der Television entstandene Bild mit Hilfe einer künstlichen Lichtquelle lichtstark zu machen und dadurch entsprechend zu vergrössern. Mehr als zehn Arbeiten behandeln — ausser den diesbezüglichen Patentbeschreibungen — dieses Thema.

Den Reichtum und die Vielseitigkeit seiner Interessen kennzeichnet die Tatsache, dass er sich auch mit der Frage der Proportionalität der schweren und trägen Masse beschäftigte. Er hatte einen neuen Gedanken, um die Proportionalität der beiden Massen zu beweisen. Auf einem sich drehenden Himmelskörper muss sich nämlich ein auf einer Flüssigkeit schwimmender Körper bewegen, wenn zwischen den beiden Massen keine Proportionalität besteht.

Auf seine feine Beobachtungsgabe und analytischen Fähigkeiten weisen die zwei Arbeiten hin, die er über die auf die Elektronen wirkende mechanische Kraft veröffentlichte.

Die in der Glühlampenfabrik in Ujpest verbrachten achtzehn Jahre waren die Zeit seiner stillen schöpferischen Tätigkeit. Er hatte viel Sorgen im Familienkreise, da seine Frau während der Epidemie des Jahres 1918 an spanischer Grippe gestorben war und die Pflege und Erziehung seines Sohnes ihm viel Sorgen, aber auch viel Freude bereitete. Sein Sohn war äusserst begabt, er hoffte viel von ihm, leider fiel diese seine Hoffnung dem Faschismus zum Opfer.

Ebenfalls auf Grund politischer Massnahmen wurde er in seiner Stellung pensioniert. Er fand eine Anstellung in einer kleinen Fabrik, wo er die Erzeugung von Selengleichrichtern leitete, die auf Grund seines Patenten hergestellt wurden. Auch hier beschäftigte er sich wissenschaftlich mit dem vielseitigen Verhalten des Selens.

Mit der Befreiung veränderten sich auch seine Verhältnisse. Die Regierung und die Ungarische Akademie der Wissenschaften waren bemüht, ihn wo immer möglich für die erlittenen Ungerechtigkeiten zu entschädigen. Im Jahre 1948 wird er zum Privatdozenten ernannt und zum korrespondierenden Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Er erhält die Auszeichnung »Für hervorragende Arbeit«. Im Jahre 1950 wird ihm der Rang eines ausserordentlichen Universitätsprofessors verliehen und er nimmt am physikalischen Unterricht an der Universität teil. Hier hat er eine interessante Idee. Um die jungen Physiker mit den Ergebnissen der ungarischen Forscher vertraut zu machen, plante er die Veranstaltung von Vortragsreihen, wo die einzelnen Forscher über ihre eigenen Forschungen berichten und die interessanten Geheimnisse ihrer Werkstatt lüften. Hierbei sollten die Vortragenden auch noch darüber Rechenschaft ablegen, wo und wie sich ihre Arbeit an die grosse Front der physikalischen Gedankengänge anschliesst.

Jetzt ist sein Arbeitsplatz schon an der Universität, von der Gleichrichterfabrik hat er sich endgültig getrennt. Doch waren die raschen Veränderungen dieser fieberhaften Zeiten, die im Zeichen einer grossangelegten Neuorgani-

sation des ungarischen wissenschaftlichen Lebens standen, nicht geeignet, dass sich um Selényi eine entsprechende Arbeitsgruppe bildete. Während seines Wirkens an der Universität wendet er sein Elektrographierungsverfahren zum Hervorrufen der im Elektronenmikroskop entstandenen Bilder an. Er entdeckt die zerstörende Wirkung von Quecksilberdämpfen auf die Selengleichrichter und auf die Selenphotoelemente. Im Jahre 1952 wird ihm für seine Tätigkeit der Kossuthpreis verliehen.

Sein Gesundheitszustand verschlechtert sich. Es quälten ihn ständig Kopfschmerzen, er hat Schwindelanfälle. Dass er trotz des Verlustes seines Sohnes arbeitsfähig blieb, verdankt er dem Umstand, dass er sich im Jahre 1936 neu verheiratete und dass seine Frau solche Lebensverhältnisse und eine solche geistige Atmosphäre um ihn zu schaffen verstand, dass ihm das Leben trotz all seiner Tragik wieder lebenswert erschien. So war es denn möglich, dass er ständig arbeitete und wieder weitgreifende Pläne schmiedete. So stellt er das Eötvös-Gedenkbuch zusammen und schreibt eine Würdigung über Roland Eötvös. Das Erscheinen des Eötvös-Gedenkbuches war seine letzte Freude. Zu diesem Zeitpunkt befand sich seine Krankheit bereits in einem vorgerücktem Zustand. Nach einer vorübergehenden Besserung setzte eine unerwartete innere Blutung seinem Schaffen ein Ende.

Selényi verkörperte den Forschertyp, der in jeder praktischen Frage die Wissenschaft sah und aus jedem kleinen Detail die grossen Grundsätze herauschälte. Die Wissenschaft war für ihn die lebenspendende Luft, in der sein Geist, getragen von der Welle edler Gefühle, den Höhen zustrebte.

Die Zahl seiner Veröffentlichungen ist nahezu hundert, zusammen mit seinen Patentbeschreibungen weit mehr als hundert. Die im Druck befindliche Nummer der Zeitschrift »Fizikai Szemle« (Physikalische Rundschau) bringt eine Aufzählung seiner sämtlichen Arbeiten. Die Ungarische Akademie der Wissenschaften hat die Absicht, seine Werke in einem weiteren Rahmen der grossen Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

Z. Gyulai

REFLEX OSCILLATORS

By

P. S. FARAGÓ

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE
FOR PHYSICS, BUDAPEST

and

G. GROMA

UNIVERSITY INSTITUTE
FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Presented by L. Jánossy. — Received 10. XI. 1953)

Comparing the mechanism of reflex klystron and Barkhausen-Kurz oscillators, we found them principally to be the same. Both are feed-back oscillators, with one h. f. field producing the bunching of electrons and also converting (a fraction of) the kinetic energy of the electrons into h. f. power, with a feed-back mechanism maintained by a constant retarding field. All the differences in the behaviour of the two types of oscillators can be explained by the fact that in the reflex klystron the h. f. interaction space is separated from the constant retarding field, and in the Barkhausen-Kurz oscillator the two are superimposed. The main consequences are discussed quantitatively.

Introduction

In an excellent paper Pierce [1] gave a mainly qualitative but very clear discussion of the essential principles of reflex klystrons. He defined reflex oscillators as »oscillators in which an electron stream passes through a longitudinal radio-frequency field across a 'gap' between two electrodes, then into a drift space in which there is a retarding electric field produced by a negative repeller electrode and finally returns through the radio-frequency field across the gap«. The paper included the Barkhausen-Kurz oscillator in this category as an example of an »early« reflex oscillator, the reflex klystron being a »modern« reflex oscillator. This view of Pierce caused considerable controversy among those working in the field at that time [2].

It is true — as Condon stated — that it would be difficult to trace a genetic connection between the two types in their historical development. »As a matter of fact« — emphasized Woodyard — »the development of the reflex klystron had nothing to do with the Barkhausen oscillator, but rather resulted from the idea of folding an ordinary two-resonator klystron back upon itself«. Nobody really means — nor did Pierce — that the reflex klystron arose merely as a development of the Barkhausen-Kurz oscillator.

Another repudiated view of Pierce was his speaking only of »a new terminology, that of velocity modulation, drift action and bunching, which makes it possible to explain the action of reflex oscillators in simple terms«. It was correctly pointed out by Harrison, that these principles are more than merely

a »new terminology«; the recognition and application of these principles made possible the development of a number of new and useful devices.

On the other hand, we must contradict Condon's opinion, according to which »the detailed operation of the two tubes is so different that their theory has very little in common«. Harrison, comparing the definition of the reflex oscillator given by Pierce and the usual explanation of the Barkhausen oscillator, found discrepancies which, according to him, make the analogy questionable. We think that it is not the analogy which is not valid, but rather that the definition is not general enough. Using a somewhat more general definition of reflex oscillators, basing it upon the fundamental function of the reversal of the electrons in the retarding field, one finds that the discrepancies referred to are not essential, but only of formal importance.

The analogy between the two types of oscillators is strikingly demonstrated by a special tube developed by Heil and Ebers [3]. This tube is fundamentally a Barkhausen oscillator, working, however, with an electron gun, i. e. a well collimated electron beam, and a cavity resonator, in contrast to the classical form of these devices. Also the theory of the tube was given by Ebers [4] considering velocity modulation, bunching, drifting, etc., as fundamental processes.

The purpose of this paper is to treat in parallel the elementary processes underlying the operation of the Barkhausen-Kurz oscillator and that of the reflex klystron respectively, showing thereby both their close resemblance and their essential differences which are responsible for their different operating characteristics.

General Description

The operation of any kind of feed-back oscillator can be explained as follows: If electrons receive kinetic energy from an accelerating field sustained by a d. c. power source, a fraction of this energy can be transferred to the radio-frequency field caused by the potential drop across the output load of the electron tube, i. e. to the output load itself. The average power output throughout a complete cycle can be made positive by modulating the density of the electron beam in proper phase by an input power. Self-excited oscillations are obtained if the input power necessary for the proper density modulation of the beam, being a fraction of the output power, is fed back from the output circuit. Reflex oscillators can be considered as a class of feed-back oscillators characterized by having one resonant circuit, which produces a longitudinal h. f. field performing a double function (modulation of beam density and playing the role of load circuit), *feedback being performed by the electrons reversed by a constant retarding field*, and thus passing twice through the same high-frequency field.

This definition evidently applies to the reflex klystron oscillator, whose principle of operation is described by the »definition« given by Pierce quoted in the introduction. But our definition applies to the Barkhausen-Kurz oscillator as well.

First of all, it is worth mentioning that the original «Elektronentanz»-interpretation of the oscillations [5] is far from complete. If the role of the external (resonant) circuit is not taken into consideration, one can hardly find a reason for the correct phasing of electrons, which is necessary for a net power yield.

In a Barkhausen-Kurz oscillator there is also one resonant circuit, which may be connected between any two of the terminals of a triode. In practice it is either between the cathode and the grid, or between the grid and the anode, the two alternatives being perfectly equivalent in principle, although considerable deviations in details of operating characteristics may occur.* This single resonant circuit supplies the high-frequency field which produces the density modulation of the electron beam — variation of space charge density distribution as the function of time in general — and plays also the role of the external load. Also in this case the retarding field is responsible for the feedback action which results in self-sustained oscillation.

There is only one difference between the reflex klystron and the Barkhausen-Kurz oscillator, which is of fundamental importance. In the reflex klystron there are three separated regions: d. c. accelerating field, a short high-frequency field and the retarding field which is also the drift space. In the Barkhausen-Kurz oscillator, however, one of the d. c. fields — either the accelerating field or the retarding field — is superimposed on the high-frequency field. It is this difference that has the following considerable consequences for the behaviour of the two types of oscillators:

1. The transit angle of electrons in the retarding field for optimum condition of oscillation is $2\pi \left(n - \frac{1}{4} \right)$ for reflex klystrons, and $2\pi \left(n + \frac{1}{4} \right)$ for Barkhausen-Kurz oscillators.

2. The efficiency of reflex klystrons is much higher than that of Barkhausen-Kurz oscillators.

3. The frequency range in which a reflex klystron can be tuned is not so wide as that for Barkhausen-Kurz oscillators. This statement applies to electronic and mechanical tuning as well.

* In some cases there is one resonant circuit between the cathode and the grid, and another between the grid and the anode. Thus this case might seem to contradict our definition. However, even in this case there is no coupling between the two resonant circuits, feed-back is provided only by the returning electrons, and both circuits have the double function described above. This arrangement may have practical advantages and disadvantages, but the underlying principle is still the same as in the simpler cases, one of which will be treated quantitatively.

The Motion of Electrons within the Tubes

In this section we reproduce some results well-known from textbooks and part of the results derived by Ebers [4], this being the simplest way of showing the striking analogy between the reflex klystron and the Barkhausen-Kurz oscillator.

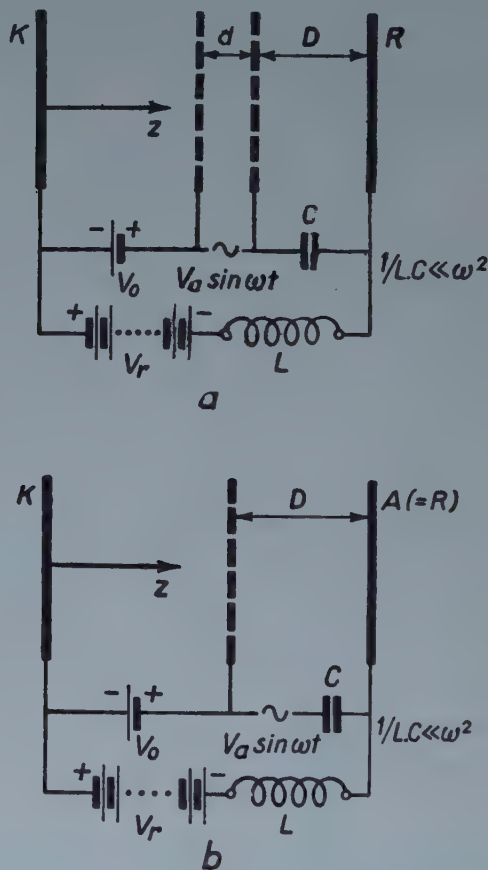


Fig. 1. To the discussion of the reflex klystron (a) and of the Barkhausen—Kurz oscillator (b)

Let us write down in parallel the equations of the motion for both oscillator tubes and compare their solutions. As to the Barkhausen-Kurz oscillator, we shall confine our considerations to the case where the external resonant circuit is connected between the grid and the anode of a triode. This is the case corresponding to the tube of Heil and Ebers, thus some of our later results can be tested by their experimental results.

For the sake of simplicity we consider the motion of electrons in the homogeneous field of plan parallel electrodes as a one-dimensional problem

without taking the interaction between electrons into consideration. We also suppose that electrons pass the high-frequency interaction space only once in the forward and once in the reverse direction.

Using the notations of Figs. 1/a and 1/b for the reflex klystron and the Barkhausen-Kurz oscillator respectively, the equations of motion in the retarding field are

for the reflex klystron :

$$m\ddot{z} = -e(V_r + V_0)/D,$$

for the Barkhausen-Kurz oscillator :

$$m\ddot{z} = -\frac{e}{D} [V_r + V_0 + V_a \sin(\omega t + \alpha)]$$

where α is the phase-angle of the h. f. field at the entrance of the electron. From these we get the velocity of the electron :

$$\dot{z} = v'_0 - \frac{eV_1}{mD}t,$$

$$\dot{z} = v'_0 - \frac{e}{mD} \left[V_1 t - \frac{V_a}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) \right],$$

where $V_1 = V_0 + V_r$ and $v'_0 = v(0)$ is the velocity of the electron when entering the retarding field. The velocity of the electron when entering the high-frequency field is (from the energy equation $\frac{1}{2} mv^2 = eV$)

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} V_0}.$$

We suppose that the transit time of the electrons in the h. f. field is negligible compared to the oscillation period of the field.

No restriction can be made as to the transit time in the h. f. field, and we have to remember that the retarding field is superimposed on the h. f. field.

Thus the velocity of the electron when entering the retarding field (i. e. $t = 0$) is (again from the energy equation) :

$$v'_0 = \sqrt{2 \frac{e}{m} (V_0 + V_a \sin \alpha)}$$

$$v'_0 = v_0$$

and using these expressions :

$$\dot{z} = v_0 \sqrt{1 + \frac{V_a}{V_0} \sin \alpha - \frac{eV_1}{mD\omega} (\omega t)} \quad (1a)$$

$$\dot{z} = v_0 - \frac{e}{mD\omega} \{ V_1 \omega t - V_a [\cos(\omega t + \alpha) - \cos \alpha] \}. \quad (1b)$$

These equations yield by integration :

$$z = v_0 t \left| \sqrt{1 + \frac{V_a}{V_0} \sin \alpha} - \frac{eV_1}{2mD\omega^2} (\omega t)^2 \right| \quad (2a)$$

$$z = v_0 t - \frac{e}{mD\omega^2} \left\{ \frac{V_1}{2} (\omega t)^2 - V_a [\sin(\omega t + \alpha) + \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \alpha] \right\} \quad (2b)$$

We now introduce the transit angle of the electrons in the retarding space $\Theta = \omega T$, T being the transit time in that region. In the absence of an h. f. field the transit angle of an electron entering with a velocity v_0 , is :

$$\Theta_0 = \frac{2mDv_0 \omega}{eV_1} \quad (3)$$

Substituting this expression into (2a) and (2b) resp., we obtain :

$$\frac{\Theta_0 \omega}{v_0} z = -(\omega t)^2 + (\omega t) \Theta_0 \sqrt{1 + k \sin \alpha} \quad \left| \quad \frac{\Theta_0 \omega}{v_0} z - 2K \sin(\omega t + \alpha) = -(\omega t)^2 \right.$$

with

$$k = \frac{V_a}{V_0}$$

with

$$K = \frac{V_a}{V_1}$$

Introducing the new variable :

$$Z = (\Theta_0 \omega / v_0) z \quad \left| \quad Z = (\Theta_0 \omega / v_0) z - 2K \sin(\omega t + \alpha) \right. \quad (4b)$$

we find :

$$Z = -(\omega t)^2 + A_1 \omega t \quad (5a) \quad \left| \quad Z = -(\omega t)^2 + A_2 \omega t + B_2 \quad (5b) \right.$$

with

$$A_1 = \Theta_0 \sqrt{1 + k \cdot \sin \alpha}$$

with

$$A_2 = \Theta_0 - 2K \cdot \cos \alpha$$

$$B_2 = -2K \cdot \sin \alpha.$$

If we plot Z against ωt for different values of the parameter α , according to relation (5a), we obtain the Applegate-diagram of reflex klystrons (Fig. 2/a).

From this it is seen that 1. bunching occurs around an electron which crosses the h. f. interaction space when the field intensity is zero and increasing in such a direction as to decelerate the electrons; 2. optimum drift angles for the center of the bunch are $2\pi \left(n - \frac{1}{4} \right)$.

A similar family of parabolas is obtained for the Barkhausen-Kurz oscillator, if the function given by (5b) is plotted. (Of course the curves corresponding to the same value of α are different, because $A_1 \neq A_2$ and $B_2 \neq 0$.) As the electrons enter the retarding field and leave it again at $z = 0$, the drift angle

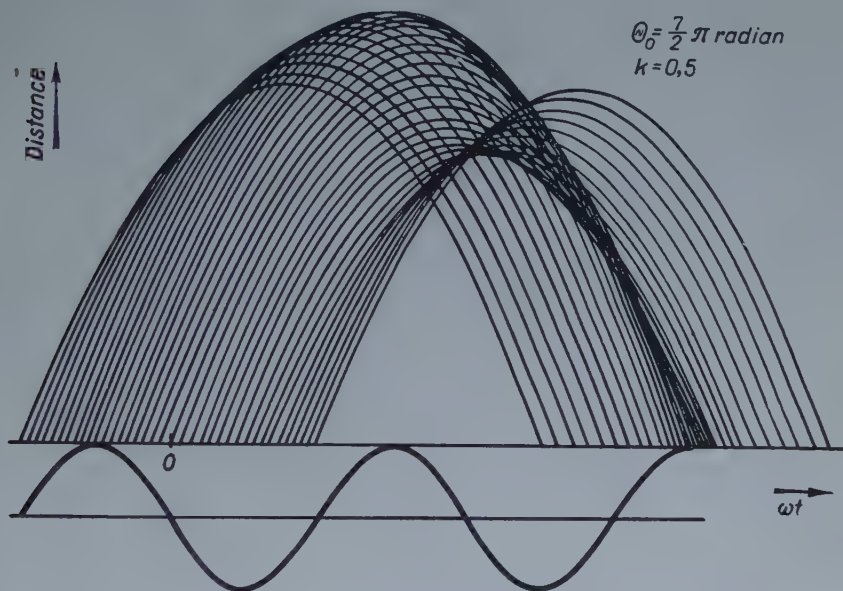


Fig. 2/a. Applegate-diagram of the reflex klystron

for a given value of α is represented by the interval between two intersections of the curves $Z = -(\omega t)^2 + A_2 \omega t + B_2$ and $Z = -2K \cdot \sin(\omega t + \alpha)$. Such a diagram is shown in Fig. 2/b.

It can be seen that upon entering the grid-plate region the electrons receive a velocity modulation and become bunched in space around one which enters at about the maximum value of the h. f. field. Under optimum conditions the bunch is formed after the electrons have reversed their direction, and the bunch drifts toward the grid when the h. f. field opposes its motion, leaving the interaction space when the h. f. field is zero and decreasing. Thus the optimum drift angle for the center of the bunch is $2\pi \left(n + \frac{1}{4} \right)$.

To get some more precise quantitative information we need the velocity of the returning electrons when leaving the h. f. field as a function of their entrance phase angle and their drift angle in the retarding field.

As the retarding field is constant the electrons are on the way considered under the influence of an accelerating potential :

$$V_0 + V_a \cdot \sin \alpha - V_a \cdot \sin (\alpha + \Theta).$$

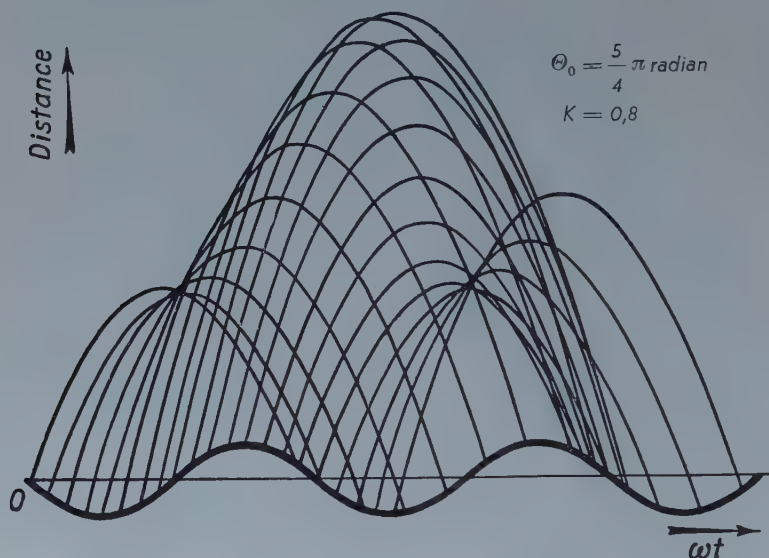


Fig. 2/b. Graphical representation of electron motion in a Barkhausen—Kurz oscillator, corresponding to the Applegate-diagram

The velocity of the electrons when leaving the h. f. field after reversal is

from the energy equation :

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + k [\sin \alpha - \sin (\alpha + \Theta)]} \quad (6a)$$

from (1b)

$$v_1 = v (\alpha + \Theta) = v_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\Theta_0} [\Theta + K \cos \alpha - \cos (\alpha + \Theta)] \right\} \quad (6b)$$

where (3) was used to eliminate V_1 .

When the electron leaves the retarding field we have $z = 0$, thus we obtain from (2a) and (2b) respectively

$$\Theta = \Theta_0 \sqrt{1 + k \sin \alpha}.$$

Restricting our treatment to low-level operation, i. e. $k \ll 1$, we take

$$\Theta \sim \Theta_0 + \frac{1}{2} k \Theta_0 \sin \alpha$$

which, substituted in (4a), gives

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1 + k \left[\sin \alpha - \sin \left(\alpha + \Theta_0 + \frac{1}{2} k \Theta_0 \sin \alpha \right) \right]}. \quad (7a)$$

$$\Theta^2 - \Theta (\Theta_0 - 2K \cos \alpha) + 2K [\sin \alpha - \sin (\alpha + \Theta)] = 0.$$

This transcendental equation in Θ can be solved, if the terms $\sin \Theta$ and $\cos \Theta$ are expanded in power series. As Z is in general large an expansion about Θ_0 is used and terms of higher than the second order are neglected. If this is done, the above equation will be one of the second degree. As only low-level operation will be considered, i. e. $K \ll 1$, the solution of this equation can be approximated again by a power series, containing only zero, first, and second order terms in K (a first order approximation is very bad). If this approximate solution is substituted into (4b), we obtain*:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_0} = & 1 \\ & - \frac{2K}{\Theta_0^2} \{ (\sin y - \sin \alpha) [-2 \\ & - \frac{2K}{\Theta_0^2} (2\Theta_0 \cos \alpha + 2\Theta_0 \cos y \\ & + 4 \sin \alpha + \Theta_0^2 \sin y)] + \cos \alpha [\Theta_0 \\ & + \frac{2K}{\Theta_0^2} (2\Theta_0^2 \cos y + \Theta_0^3 \sin y)] + \Theta_0 \cos y \} \\ & y = \alpha + \Theta_0. \end{aligned} \quad (7b)$$

Conversion Efficiency and Optimum Drift Angle

We define the conversion efficiency of an oscillator by the ratio of the energy transferred by the electrons to the h. f. field to their kinetic energy before the interaction, averaged over a complete period of the h. f. field. —

If an electron on its forward path enters the h. f. field with the velocity v_0 and on its reverse motion leaves it with the velocity v_1 , the energy transferred by the electron to the h. f. field is

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

* This was calculated by J. Németh.

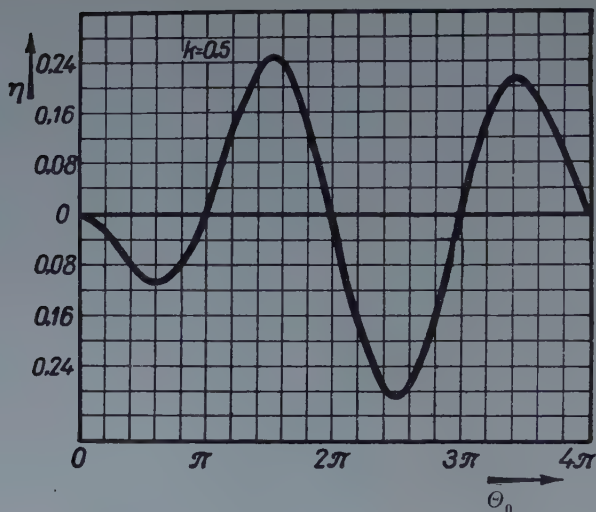


Fig. 3/a. Efficiency of the reflex klystron as a function of Θ_0

As the kinetic energy obtained by the electrons from the d. c. power supply is $mv_0^2/2$, the conversion efficiency is

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 d\alpha.$$

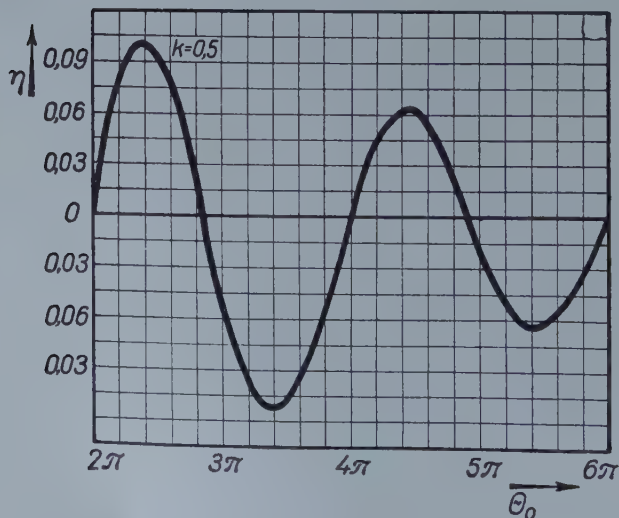


Fig. 3/b. Efficiency of the Barkhausen-Kurz oscillator as a function of Θ_0

This integral can be evaluated without difficulty.

By substituting (5a), we obtain :

$$\eta = -k J \left(\frac{k \Theta_0}{2} \right) \sin \Theta_0 \quad (8a)$$

$J_1(x)$ being the first order Bessel function.

By substituting (5b), we obtain :

$$\eta = -4K^2 \frac{2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0}{\Theta_0^2} \quad (8b)$$

Figs. 3/a and 3/b show η plotted against Θ_0 for the reflex klystron and for the Barkhausen-Kurz oscillator respectively with $k = K = 0.5$. It is seen that η has positive values only in definite intervals of Θ_0 , which means that with prescribed dimensions there are prescribed voltages where self-excited oscillations can occur. The ordinate scales of the diagrams show further that the efficiency of the reflex klystron may reach much higher values than that of the Barkhausen-Kurz oscillator. This is caused by the fact that the transit time through the h. f. interaction space is much shorter in the reflex klystron than in the Barkhausen-Kurz oscillator; as is well-known an increase of the transit time decreases the efficiency of the reflex klystron as well.

We may express the above results by considering the beam conductance in the two cases. As the d. c. input power is $I_0 \cdot V_0$, I_0 being the emission current, the h. f. output power is $\eta \cdot I_0 V_0$. The power output of a generator is $P = -G \cdot V_a^2/2$, G being its inner conductance and V_a the voltage amplitude on its terminals. Thus the beam conductances of our oscillators are :

$$G = -\frac{2 \cdot I_0 \cdot V_0}{V_m^2} \eta,$$

i. e.

$$G = 2 \frac{I_0}{V_a} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \sin \Theta_0.$$

(9a)

$$G = 8 \frac{I_0 V_0}{V_1^2} \frac{2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \cdot \sin \Theta_0}{\Theta_0^2}.$$

(9b)

Self-excited oscillations can only occur if the sum of the beam conductance and the conductance $1/r$ representing the losses of the external circuit is zero or negative. Such regions are marked in Figs. 4/a and 4/b. It can be seen also from these diagrams, that the optimum condition for self-excited oscillations is given by

$$\Theta_0 = 2\pi \left(n - \frac{1}{4} \right) \quad (10a)$$

$$\text{and} \quad \Theta_0 = 2\pi \left(n + \frac{1}{4} \right) \quad (n \text{ integer}) \quad (10b)$$

for the two types of oscillators respectively, in accordance with the qualitative results obtained from Figs. 2/a and 2/b. Different values of n yields the different modes of oscillation.

As to the Barkhausen-Kurz oscillator, our condition, given by (10b), does not agree with the one commonly given in the literature: $2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

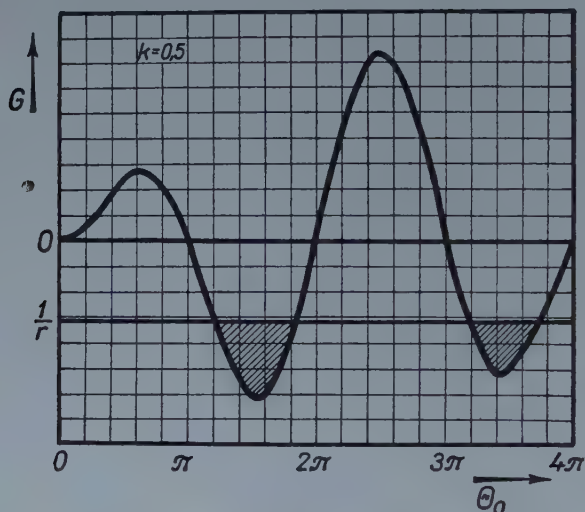


Fig. 4/a. Electronic conductance of the reflex klystron as a function of θ_0 . For a shunt load resistance r self-excited oscillations occur only in the shaded regions.

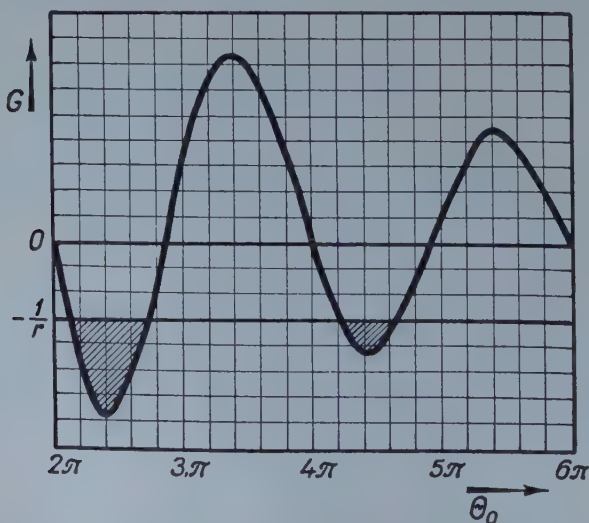


Fig. 4/b. Electronic conductance of the Barkhausen-Kurz oscillator as a function of θ_0 . For a shunt load resistance r self-excited oscillations occur only in the shaded regions.

This discrepancy is due to the fact that the original explanation of the oscillations assumed an oscillating space charge. However, the formation of such an oscillating space charge, or the storing out of correct-phase electrons, i. e. the bunching process can hardly be explained without considering the role of the external resonant circuit, which leads to our result, being confirmed by the experiences of Heil and Ebers.

Frequency Range of the Oscillators

To explain the properties of an oscillator with respect to mechanical or electronic tuning, one has to know both the real and imaginary component of the beam-admittances $G + jB$. The derivation of this quantity for the reflex klystron is very simple and well-known [6], if $k \ll 1$ the result is :

$$G = \frac{2I_0}{V_0} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \sin \Theta_0, \quad (9a)$$

$$B = \frac{2I_0}{V_0} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \cos \Theta_0. \quad (10a)$$

The situation is a little more complicated in the Barkhausen-Kurz oscillator because of the finite length of the h. f. interaction space. Thus the calculations are also a little more involved [7], they lead to the following results :

$$G = \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} [2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0], \quad (9b)$$

$$B = \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} [2(\sin \Theta_0 - \Theta_0(1 + \cos \Theta_0))] \quad (10b)$$

if $K \ll 1$.

The condition for self-excited oscillations is as mentioned

$$\frac{1}{r} + \frac{2I_0}{V_0} \frac{J_1(k\Theta_0/2)}{k} \sin \Theta_0 = 0 \quad \left| \quad \frac{1}{r} + \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} [2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0] = 0 \right.$$

$1/r$ being the conductance of the external circuit. From these we have

$$\frac{2I_0}{V_0} \frac{J_1\left(\frac{k\Theta_0}{2}\right)}{k} = -\frac{1}{r \sin \Theta_0} \quad \left| \quad \frac{8I_0V_0}{V_1^2 \Theta_0^2} = -\frac{1}{r [2(1 - \cos \Theta_0) - \Theta_0 \sin \Theta_0]}$$

which substituted in (10a) and (10b) resp., gives

$$B = -\frac{\cotg \Theta_0}{r} \quad (11a) \quad \Bigg| \quad B = -\frac{\cotg (\Theta_0/2)}{r} \quad (11b)$$

The frequency of a self-excited oscillator is given by the resonance frequency of the whole oscillator system, consisting of the h. f. interaction space (characterized as circuit element by the beam-admittance) and an external circuit. If L , and C are the inductance and capacitance of the external parallel resonant circuit, the condition of resonance is :

$$-\frac{1}{\omega L} + \omega C + B = 0.$$

Introducing the resonant frequency $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ of the external circuit and its quality-factor $Q = r/\omega L$, the above equation becomes

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) Q = -Br$$

or, if $\omega \approx \omega_0$, we obtain

$$2Q \frac{\Delta\nu}{\nu} = -Br \quad (12)$$

with $\Delta\nu = \nu - \nu_0 = (\omega - \omega_0)/2\pi$

Substituting (11a) and (11b) resp. into (12), we get

$$2Q \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \cotg \Theta_0 \quad (13a) \quad \Bigg| \quad 2Q \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \cotg \frac{\Theta_0}{2} \quad (13b)$$

or introducing Θ_0 corresponding to optimum conditions :

$$\Theta_0 = 2\pi \left(n - \frac{1}{4} \right) + \Delta\Theta_0, \quad \Bigg| \quad \Theta_0 = 2\pi \left(n + \frac{1}{4} \right) + \Delta\Theta_0,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2Q} \cotg\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta_0\right). \quad (14a)$$

As is well known, under optimum conditions ($\Delta\theta_0 = 0$) the frequency given by the reflex klystron oscillator is that of the resonant cavity, and a symmetrical variation of θ_0 yields a symmetrical detuning.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2Q} \cotg \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta_0 \right). \quad (14b)$$

It is seen that under optimum conditions, ($\Delta\theta_0 = 0$) the frequency given by this oscillator deviates from that of the external circuit resonance frequency, the latter being somewhat lower ($\Delta\nu > 0$) although detuning is small as Q is usually very large. The resonant frequency of the external circuit would be obtained with $\Delta\theta_0 = \pi/2$, but at this value no oscillation occurs (Fig 3/b. or 4/b). Therefore ν_0 can be regarded as the lowest frequency limit. If, on the other hand, θ_0 is decreased ($\Delta\theta_0 < 0$), the oscillation frequency increases rapidly. The dependence of oscillator frequency on $\Delta\theta_0$ is thus asymmetrical with respect to ν_0 .

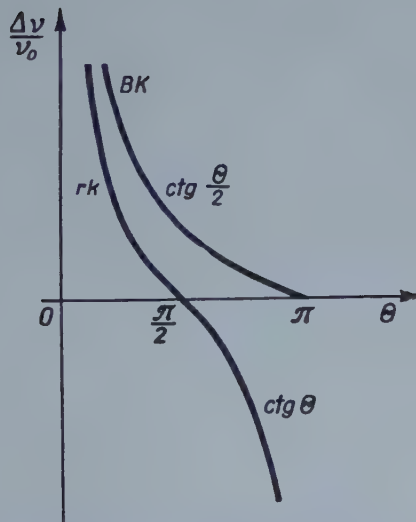


Fig. 5. To the comparison of the tuning properties of the two types of reflex oscillators

A comparison of (14a) and (14b) also shows that in general the Barkhausen-Kurz oscillator can be tuned in a much wider frequency range than the reflex klystron, for $-\cotg x < \tg(x/2)$ in the interval $0 < x < \pi$ (corresponding to $+\frac{\pi}{2} > \Delta\theta_0 > -\frac{\pi}{2}$), (Fig 5).

The mechanical tuning possibilities are practically the same. The resonant frequency of the cavity is varied by its deformation in both types of oscillators. In the reflex klystron the variation of the resonator gap affects only the resonant frequency, other parameters remaining constant. (The change in transit time is usually not appreciable.) In the Heil-Ebers oscillator, however, a deformation of the cavity changes also the intensity of the retarding field, so that an electronic tuning is involved as well. It can be shown, however that this inherent electronic tuning can be neglected because of the high Q -value of the cavity.

REFERENCES

1. J. R. Pierce : Reflex Oscillator, Proc. I. R. E. **33**, 112, 1945.
2. Discussion on Reflex Oscillators, Proc. I. R. E. **33**, 483, 1945.
3. O. Heil and J. J. Ebers : A New Wide-Range High-Frequency Oscillator. Proc. I. R. E. **38**, 645, 1950.
4. J. J. Ebers : Retarding-Field Oscillators, Proc. I. R. E. **40**, 138, 1952.
5. H. Barkhausen and K. Kurz : Die kürzesten, mit Vakuumröhren herstellbaren Wellen. Phys. Zeitschr., **21**, 1, 1920.
6. A. E. Harrison : Klystron Tubes, McGraw-Hill Book Co. Inc. New-York, 1947.
7. F. W. Gundlach : Grundlagen der Höchstfrequenztechnik, Springer-Verlag, Berlin, 1950.

ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

П. С. Фараго и Г. Грома

Резюме

Если сравнить механизмы колебаний отражательного осциллятора и осциллятора Баркгаузена—Курца, то оказывается, что они по сути дела не отличаются друг от друга. Оба осцилляторы с обратной связью, в которых и фазовая фокусировка электронов и передача некоторой доли их кинетической энергии высокочастотному полю обуславливаются одним и тем же высокочастотным полем, а обратная связь осуществляется с помощью постоянного отражательного поля.

Вся разница между двумя осцилляторами объясняется тем, что в отражательном клистроне высокочастотное поле отделено от постоянного отражательного поля, а в осцилляторе Баркгаузена—Курца они не отделены.

Важнейшие следствия этих разниц рассмотрены количественно.

QUANTUM EFFECTS IN THE INTERACTION BETWEEN FREE ELECTRONS AND ELECTROMAGNETIC FIELDS

By

P. S. FARAGÓ

and

G. MARX

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE
FOR PHYSICS, BUDAPEST

UNIVERSITY INSTITUTE
FOR PHYSICS, BUDAPEST

(Presented by. L. Jánossy. — Received 11. I. 1954)

An electron beam shot through a transverse r. f. field suffers a direction spread. If experimental conditions are suitably chosen, the direction spread seems to be due only to the quantum dispersion of energy exchange between free electrons and r. f. field. A simple collector electrode system might allow not only the detection of the direction spread of the electrons, but the presence of a quantum effect might be checked by plotting the collector current versus r. f. field amplitude, the plot for the quantum effect being different from those for classical effects.

In recent years several papers [1—4] were published, dealing with a dispersion in energy exchange between free electrons and r. f. fields, which the classical theory cannot predict. One of them [3] reports to have succeeded in detecting such an effect by measuring the energy distribution of electrons shot through a longitudinal radio-frequency field in a wave guide. In such an experiment the energy distribution has three main sources: 1. emission velocity distribution in the electron beam, 2. a classical dispersion of energy exchange arising from the functional dependence of transit time on the entrance phase-angle of the electrons, and 3. the quantum effect sought. It can be shown that the quantum effect cannot be made larger than the effects (1) and (2), which under convenient experimental conditions are both of the same order of magnitude. The success of the experiment is largely due to the fact that if the current to a retarding electrode is calculated in terms of the r. f. field amplitude two separate factors are obtained: effect (2) appears only as a systematic velocity modulation which can be described by a Bessel function, while the typically statistical quantum effect is represented by an exponential factor. Thus the experimental results can be represented by a quantity which, plotted against the r. f. field amplitude, would show no dependence on it, in case there is no quantum dispersion while, if the quantum effect exists the plots would have to show a linear relationship in the r. f. field amplitude. The latter result was reported in the paper referred to.

In our opinion it would, however, be desirable to arrange the experiment in such a manner as to make the classical effects negligible relative to the quantum effect. The object of this paper is to show that this condition can be realized if the electrons are shot through a transverse r. f. field and the transit angle of the electrons is properly chosen. In this case there should be a dispersion in

the *direction* of electron velocities caused *only* by the quantum nature of the energy exchange.

* *

For the sake of simplicity we consider a rectangular cavity resonator-excited in its TE_{012} mode. In this case the electrical field has only one component — say in the z -direction

$$E_z = E_0 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \sin \omega t, \quad (1)$$

a and b being the lengths of the cavity in the direction of the x and y axis resp., its resonance frequency is given by

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \pi c \left[\left(\frac{2}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

If the free-space wavelength λ is given, one can always find such a cavity where an electron entering in the x -direction with a velocity $v_0 = c/n$ ($n > 1$) spends an integer number of periods. This will be the case if

$$a = \lambda \frac{k}{n} \quad \text{and} \quad b = \frac{a}{2} [(k/n)^2 - 1]^{-1/2}$$

k being an integer and $k/n > 1$.

Using the first of these expressions and $x = v_0(t - t_0)$ we find from (1) supposing the electron to enter at $y = b/2$

$$E_z = E_0 \sin \frac{\omega}{k} (t - t_0) \sin \omega t. \quad (2)$$

Thus the equation of motion determining the displacement of the electron in the z -direction is

$$\ddot{z} = -\frac{e}{m} E_0 \sin \omega t \sin \frac{\omega}{k} (t - t_0). \quad (3)$$

By integration, and after simple rearrangement of our result we find

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 + \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin \omega \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)t + \frac{1}{k}t_0 \right] - \sin \omega t_0 \right\} - \\ & - \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin \omega \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)t + \frac{1}{k}t_0 \right] - \sin \omega t_0 \right\}; \end{aligned} \quad (4)$$

remembering that the transit time is $t - t_0 = 2\pi k/\omega$ we obtain for the instant at which the electron leaves the cavity

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin [\omega t_0 + 2\pi(k-1)] - \sin \omega t_0 \right\} - \\ & - \frac{eE_0}{2m\omega \left(1 + \frac{1}{k}\right)} \left\{ \sin [\omega t_0 + 2\pi(k-1)] - \sin \omega t_0 \right\}. \end{aligned} \quad (4a)$$

Equ. (4) shows that if k is an integer — as we supposed — then $\dot{z} = 0$ when the electron leaves the cavity, independently of its entrance phase-angle. Consequently, if electrons entering the cavity parallel to the x -axis, show a dispersion in their direction after having traversed the field, this is caused by the quantum nature of the interaction only.

The size of this quantum dispersion of the direction of electrons can be estimated as follows. As the electrons spend k complete periods in the r. f. field, they gain an energy W_+ during half of their transit time and loose an energy W_- during the other half of the transit time :

$$W_+ \sim W_- \sim eE_0 \bar{z} k\pi/\omega, \quad (5)$$

where \bar{z} means the average of z . An inspection of equ. (4) shows that

$$\bar{z} \sim eE_0/m\omega.$$

Since the gain and loss of energy corresponds to the absorption and emission of photons respectively, we obtain for the number of photons absorbed and emitted from (5) and (4b)

$$N_{\pm} = W_{\pm}/\hbar\omega \sim \frac{e^2 E_0^2}{m\hbar\omega^3} k. \quad (6)$$

Further, the quantum nature of the interaction implies that the energy gained by the electrons fluctuates around the average value

$$\overline{W} = \hbar\omega (N_+ - N_-)$$

(zero in our special case) with a standard deviation*

$$\Delta W = \hbar\omega (N_+ + N_-)^{1/2}, \quad (7)$$

which gives, by substituting (6):

$$\Delta W \sim eE_0 (kh/m\omega)^{1/2}. \quad (7a)$$

The energy of the electrons when leaving the cavity is $W = (1/2)mv_0^2 + (1/2)m\dot{z}^2$. As there is no component of the field parallel to v_0 , the energy dispersion is determined solely by the deviation $\Delta\dot{z}$ of the velocity component \dot{z} , leading to the energy dispersion

$$\Delta W \sim (1/2)m(\Delta\dot{z})^2$$

and resulting in a dispersion of the directions

$$\Delta\varphi_q = \Delta\dot{z}/v_0 \sim (1/v_0) \cdot (2\Delta W/m)^{1/2}.$$

Remembering that $v_0 = c/n$, and substituting (7a), we obtain

$$\Delta\varphi_q \sim \frac{ne^{1/2}}{cm^{3/4}} \left(\frac{kh}{\omega} \right)^{1/4} E^{1/2} \quad (8)$$

With the numerical values for the constants and for example $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ c.p.s. $n = 5$ (corresponding to a d.c. accelerating voltage of 10 kv) and $k = 10$, we obtain

$$\Delta\varphi_q \sim 10^{-4} E^{*1/2} \text{ rad}, \quad (8a)$$

where E^* is the amplitude of the field intensity in v/cm.

Such a dispersion of the direction can be detected, if the r. f. field within the cavity has a convenient but not too small amplitude and a reasonable, but

* This implies the assumption that the absorption and emission of quanta obey the laws of classical statistics [1].

not too short drift space is allowed between the cavity and the collector electrode. However, to make our discussion complete, two disturbing effects have still to be considered.

*

It is well-known that, if electrons pass through a transverse r. f. field and their transit time is an integer number of periods, then the path of the electrons is displaced parallel to the original one by an amount depending on the amplitude of the field and on the entrance phase-angle of the electrons. Thus a parallel beam remains parallel but its cross section is increased by the

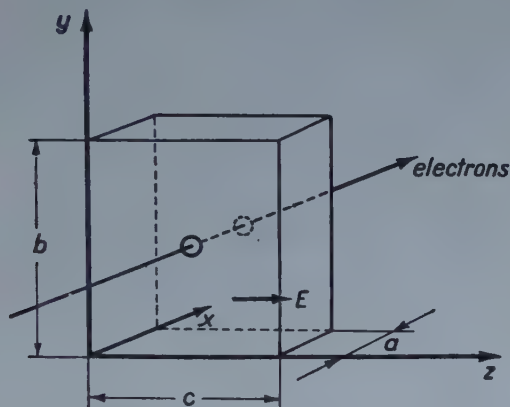


Fig. 1. To the discussion of the interaction in a transverse r. f. field

r. f. field. This increase of the diameter of the beam is $\Delta z = \int_{t_0}^t \dot{z}(t') dt'$, which with (4) roughly gives the order of magnitude

$$\Delta z \sim eE_0/m\omega^2 \sim 0,001 E^* \text{ microns}$$

at 10 kMc.p.s. Thus this effect can be neglected, as it is outweighed by the direction spread, if the length of the drift space between the cavity and the collector is $L > \Delta z / \Delta \varphi_g \sim 10^{-3} E^{*1/2}$ cm, a condition which is always satisfied.

A more serious problem to be considered is the following: as the emission velocity of the electrons is not zero, their velocities when entering the cavity are not strictly the same. Consequently there is also a spread in the transit time of the electrons across the cavity and this causes a classical spread of the direction of the emerging electrons.

Let us suppose that the velocity of the electrons is

$$v = v_0(1 + \varepsilon),$$

so that the transit time is $a/v = 2\pi k/\omega(1 + \varepsilon)$. The easiest way to calculate

the transverse component \dot{z} of the velocity of the electrons when leaving the cavity is to substitute in equ. (4) for $1/k$ and k $(1 + \varepsilon)/k$ and $(1 - \varepsilon)k$ resp. The latter is justified by the fact that the dispersion in the emission velocities is small relative to v_0 , i. e. $\varepsilon \ll 1$ and for this reason we may use a power series expansion neglecting terms of higher than the first order in ε . The calculation is straightforward and gives

$$\dot{z} = \frac{2\pi k^2}{k^2 - 1} \frac{eF_0}{m\omega} \varepsilon \cos \omega t_0$$

leading to a classical direction spread of the order of magnitude

$$\Delta\varphi_c = z/v \sim (2\pi neE_0/mc\omega) \varepsilon. \quad (9)$$

Comparing equ. (8) and (9) we find

$$\frac{\Delta\varphi_q}{\Delta\varphi_c} \sim \frac{(khm\omega^3)^{1/4}}{\pi (2e)^{1/2}} \frac{1}{E_0^{1/2} \varepsilon}. \quad (10)$$

Substituting the numerical values for the constants and taking for example — as earlier — $k = 10$, and $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ kMc.p.s., we find

$$\Delta\varphi_q/\Delta\varphi_c \sim E^{*-1/2} \varepsilon^{-1}. \quad (10a)$$

If the electron beam entering the cavity is monokinetic within 1% , which is a conservative assumption, we obtain

$$\Delta\varphi_q/\Delta\varphi_c \sim 1000 E^{*-1/2}. \quad (10b)$$

This result means that for reasonable values of the r. f. field amplitude the quantum effect is by far the most dominating factor.

In spite of the favourable results obtained, one more point has to be discussed. So far we have been dealing mainly with the relative importance of the quantum and the classical effects. If we turn now to the absolute value of the quantum effect, equ. (8a) suggests that in order to detect this effect directly from a visible increase of the cross-section of the beam, an extremely well-focussed beam and a very long drift space is wanted. However, by the following consideration we might ascertain the absolute size of the effect in an indirect way.

Electron beams have not really sharp boundaries, the current density as a function of the distance from the beam axis being given by the Gauss dis-

tribution law. If the total beam current is denoted by I_t , then the current outside a circle of the radius R (fig. 2) is given by

$$I_0 = I_t \exp [-(R/r_0)^2]. \quad (11)$$

Now the quantum effect sought makes the natural current density distribution — determined by the cathode temperature, the accelerating voltage and the optical properties of the electron gun — wider. Within the limits of our approximate estimates, we may suppose that the direction distribution due to the quantum effect is also Gaussian. In this case the resulting distribution of the current density will also be of the same type, with a resulting spread, which

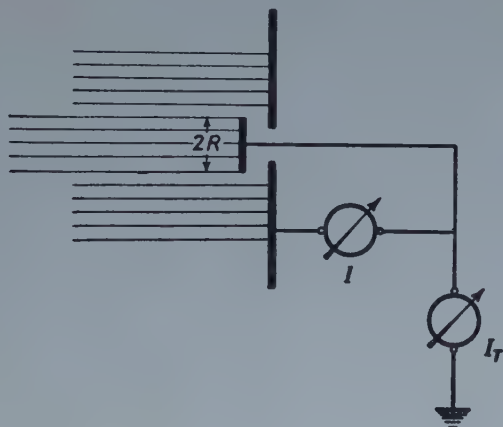


Fig. 2. Collector system for the detection of the effect

is the sum of the spreads of the two individual distributions. Thus the ratio of the currents outside a circle of radius R , with and without r. f. field is

$$\frac{I}{I_0} = 1 + 2 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 \frac{\delta r_0}{r_0} \sim 1 + 2 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 \frac{L \Delta \varphi_q}{r_0}, \quad (12)$$

where L is the length of the drift space. The increase of the spread can be detected the better the larger R , i. e. the central area of the beam cross section left out when measuring the beam current. As a numerical example let us take $I_t = 10^{-4}$ A and $I_0 = 10^{-8}$ A. In this case — from equ. (11) — $(R/r_0)^2 \sim 10$. If we take further $r_0 \sim 0,05$ cm and $L \sim 25$ cm, we obtain

$$I/I_0 \sim 1 + 0,5 (E^*)^{1/2}, \quad (13)$$

using equ. (8) for $\Delta \varphi$. If the spread of the beam were caused by some classical effect, the relation between I/I_0 and E^* would be linear, as seen e. g. from equ.

[9]. Thus by plotting (I/I_0) *v.* E^* one can ascertain the quantum nature of the effect without ambiguity.

REFERENCES

1. *L. P. Smith*, Phys. Rev. **69**, 195, 1946.
2. *J. C. Ward*, Phys. Rev. **80**, 119, 1950.
3. *C. Shulman*, Phys. Rev. **82**, 116, 1951; **83**, 4, 1951.
4. *I. R. Senitzky*, Phys. Rev. **86**, 595, 1952; **90**, 386, 1953.
5. *D. Gábor*, Phil. Mag. **41**, 1172, 1950.

КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

П. С. Фараго и Г. Маркс

Резюме

Если пучок электронов проходит через радиочастотное электромагнитное поле, перпендикулярное направлению распространения пучка, то электроны испытывают угловое рассеяние. Расчеты показали, что при разумно выбранных экспериментальных условиях это угловое рассеяние является результатом лишь квантового характера взаимодействия. С помощью простой системы электродов — как нам кажется — возможно наблюдать не только угловое рассеяние электронов, но, изображая интенсивность тока в зависимости от амплитуды радиочастотного электромагнитного поля, можем контролировать и квантовый характер явления.

В случае квантового эффекта эта кривая имеет другую форму, чем в классическом случае, а именно, в случае квантового эффекта она имеет параболическую, а в последнем случае линейную форму.

LICHTZERSTREUUNG UND HUBBLEEFFEKT

Von

TH. NEUGEBAUER

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER ROLAND EÖTVÖS-UNIVERSITÄT, BUDAPEST

(Vorgelegt von K. Novobátsky. — Eingegangen: 25. I. 1954)

Das Problem, ob es sich bei der Rotverschiebung der Spektrallinien der aussergalaktischen Nebel nicht doch um eine Art Lichtzerstreuungseffekt handelt, wird theoretisch untersucht. Die erste Bedingung einer solchen Deutung ist, dass ein Lichtquant sehr oft unter sehr kleinen Winkeln abgelenkt wird, und diese Ablenkungen sich deshalb herausmitteln. Es wird gezeigt, dass im intergalaktischen Raum tatsächlich solch ein bis jetzt in der Theorie der Lichtzerstreuung unberücksichtigter Effekt auftreten muss. Die Abschätzung der Grössenordnung zeigt jedoch, dass wenn man annimmt, dass die Beugung an Elektronen die Hauptrolle spielt, der zu erwartende Effekt immerhin zu klein wird bzw. dass man viel zu grosse Elektronendichten annehmen müsste. Diese Resultate beziehen sich a fortiori auf noch schwerere Teilchen (Mesonen, Atome usw.). Interessante Ergebnisse erhält man jedoch für Neutrinos. Erstens ist es leicht denkbar, dass Neutrinos tatsächlich in den intergalaktischen Raum hinauskommen können und zweitens wäre der Hubbleeffekt tatsächlich nach dem erwähnten Gedankengang deutbar, wenn man für die bis jetzt unbekannten Konstanten der Neutrinos Werte annehmen würde, die physikalisch recht plausibel sind. Solange wir also über Neutrinos nichts Näheres erfahren, kann die Möglichkeit der Deutung des Hubbleeffektes auf diesem Wege nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden. Zuletzt folgen noch einige Bemerkungen über das Problem der Streuung von Licht an Licht im Zusammenhang mit dieser Frage.

Einleitung

Bekannterweise wurden schon öfters Bedenken dagegen geäussert, dass man aus der Rotverschiebung der Spektrallinien der Spiralnebel [1] (also aus einem einzigen Effekt) Schlüsse auf die Kosmologie und Kosmogonie zieht bzw. daraus die tatsächliche Richtigkeit des Friedmann-Lemaitreschen Weltbildes ableitet. Ausserdem sind die Messergebnisse bezüglich des Hubbleeffektes noch bei weitem nicht so genau, dass sie zwischen den beiden Möglichkeiten, ob es sich um eine Art Dopplereffekt handelt, oder ob die Lichtquanten während ihrer Reise im intergalaktischen Raum (aus einer uns noch unbekannten Ursache) Energie verlieren, entscheiden könnten.¹ Dem Physiker gibt es jedenfalls zu

¹ Handelt es sich tatsächlich um einen Dopplereffekt, so scheint uns die Intensität der Spiralnebel aus zwei Ursachen geschwächt zu sein. Erstens wird die Energie eines jeden einfallenden Lichtquants infolge der Rotverschiebung geschwächt (Energieeffekt) und zweitens fallen infolge der von uns weggerichteten Bewegung weniger Lichtquanten in der Zeiteinheit ein als das der Fall wäre, wenn der Nebel unbeweglich sein würde (Anzahleffekt oder Verdünnungseffekt). Würde dagegen die Rotverschiebung davon herrühren, dass die Lichtquanten (aus einer uns unbekannten Ursache) Energie verlieren, so würde allein der Energieeffekt auftreten. Es ist jedoch bis jetzt nicht gelungen, aus Beobachtungsergebnissen zu entscheiden, welcher Fall tatsächlich vorliegt.

denken, dass es sich um eine Rotverschiebung handelt. Hätte man nämlich eine Violettverschiebung beobachtet, so wäre es unvermeidbar, dass man daraus ganz radikale Schlüsse bezüglich des Weltgebäudes zieht, weil es ja eine ganz abenteuerliche Hypothese wäre, anzunehmen, dass die Lichtquanten entlang ihrer Bahn Energie auflesen. Da man jedoch eine Rotverschiebung beobachtet hat, so wäre es schon denkbar, dass ein ganz kleiner Effekt, der zur Folge hat, dass die Lichtquanten Energie verlieren, uns bis jetzt entgangen ist. In unseren irdischen Experimenten existieren ja die Photonen nur während ganz kleiner Bruchteile einer Sekunde, bei dem Hubbleeffekt handelt es sich dagegen um solche, die vor Jahrmillionen entstanden sind.

Es ist schon ein alter Gedanke, dass es sich bei der betrachteten Erscheinung um eine Art Lichtzerstreuungseffekt handelt. Da das Lichtquant notwendigerweise auf die fragliche Partikel, an der es gestreut wird, einen Impuls überträgt, so nimmt seine Energie bei diesem Prozess ab. Der bekannte Einwand gegen diese Hypothese ist, dass die Lichtzerstreuung selbstverständlich mit einer Richtungsänderung verbunden ist. Würde es sich dagegen um solch eine Art Lichtzerstreuungseffekt handeln, bei dem die unter sehr kleinen Winkelablenkungen erfolgenden Streuungen die ausschlaggebenden sind, so könnten sich diese vielen kleinen Ablenkungen herausmitteln analog wie z. B. Korpuskularstrahlen durch Metallfolien ohne bemerkbare Richtungsänderung abgebremst werden können. Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die theoretische Möglichkeit eines solchen Effektes (ohne jede willkürliche Hypothese) zu untersuchen. Man könnte gleich einwenden, dass mangels einer ganz widerspruchsfreien Quantenelektrodynamik dieses Problem theoretisch überhaupt nicht zu behandeln ist; das ist jedoch nicht der Fall, die Resultate der klassischen Theorie der Lichtzerstreuung können ohne jede Zweideutigkeit in die Sprache der Quantenmechanik übersetzt werden.

§ 1. Zuerst betrachten wir die von einem einzigen Teilchen, dessen Polarisierbarkeit wir mit α bezeichnen, verursachte Lichtzerstreuung. $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t$ sei der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle am Orte des fraglichen Teilchens, dann haben wir für das darin induzierte Dipolmoment

$$= \alpha \mathfrak{E} = \alpha \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t. \quad (1)$$

Dieses alternierende Dipol verursacht bekannterweise in seiner Umgebung die elektrischen und magnetischen Feldstärken

$$|e(r, \vartheta)| = |\mathfrak{h}(r, \vartheta)| = \frac{1}{rc^2} \left| \frac{d^2 p}{dt^2} \sin \vartheta \right| = \frac{\alpha}{rc^2} \frac{d^2}{dt^2} (\mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t) \cdot \sin \vartheta, \quad (2)$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, den die Dipolachse (Richtung des elektrischen Vektors der einfallenden Lichtwelle) und die Beobachtungsrichtung (Streurichtung)

miteinander einschliessen. Weiter folgt aus (2) mit Hilfe des Poyntingschen Vektors der Energiefluss in der Beobachtungsrichtung

$$\mathfrak{E} = \frac{c}{4\pi} [e, \dot{e}], \quad (3)$$

und dessen Mittelwert nach der Zeit liefert die gestreute Lichtintensität

$$I = \overline{\mathfrak{E}} = \frac{c}{4\pi} \overline{[e, \dot{e}]}. \quad (4)$$

(2) und (4) enthalten die ganze klassische Theorie der Lichtzerstreuung von einer Partikel.

Handelt es sich um zwei Partikeln, so müssen wir die von diesen gestreuten elektrischen Vektoren addieren. Bezeichnen wir mit l den in der Beobachtungsrichtung auftretenden Gangunterschied der gestreuten Vektoren und ausserdem das Produkt von allen in (2) auftretenden zeitunabhängigen Konstanten mit a , so folgt für den von beiden Teilchen gestreuten elektrischen Vektor

$$e = a \left\{ \cos 2\pi\nu t + \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{l}{c} \right) \right\} \quad (2a)$$

und weiter für die gestreute Lichtintensität nach (4)

$$\begin{aligned} I \text{ prop. } \overline{e^2} = a^2 & \left\{ \overline{\cos^2 2\pi\nu t} + \overline{\cos^2 2\pi\nu t} \cdot \cos^2 2\pi\nu \frac{l}{c} + \right. \\ & + \overline{\sin^2 2\pi\nu t} \cdot \sin^2 2\pi\nu \frac{l}{c} + 2 \overline{\cos^2 2\pi\nu t} \cos 2\pi\nu \frac{l}{c} + \\ & \left. + 2 \overline{\cos 2\pi\nu t} \cdot \sin 2\pi\nu t \cdot \sin 2\pi\nu \frac{l}{c} + 2 \overline{\cos 2\pi\nu t \cdot \sin 2\pi\nu t} \cdot \cos 2\pi\nu \frac{l}{c} \cdot \sin 2\pi\nu \frac{l}{c} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Berücksichtigen wir hier, dass

$$\overline{\cos^2 2\pi\nu t} = \overline{\sin^2 2\pi\nu t} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{\cos 2\pi\nu t \cdot \sin 2\pi\nu t} = 0 \quad (6)$$

ist, so folgt

$$\overline{e^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2\pi\nu \frac{l}{c} \right\}. \quad (7)$$

Die gestreute Intensität in einer vorgegebenen Richtung kann also in Abhängigkeit vom Argument der trigonometrischen Funktion in (7) alle Werte zwischen Null und der vierfachen von der von einer Partikel gestreuten Intensität $\left(\frac{1}{2} a^2\right)$ annehmen.

Verallgemeinern wir jetzt die erhaltenen Resultate auf regellos verteilte Partikeln, so folgt analog zu (2a)

$$\begin{aligned} e &= a \sum_{n=1}^N \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{l_n}{c} \right) = \\ &= a \sum_{n=1}^N \left(\cos 2\pi\nu t \cdot \cos 2\pi\nu \frac{l_n}{c} + \sin 2\pi\nu t \cdot \sin 2\pi\nu \frac{l_n}{c} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

wo l_n den Gangunterschied des vom n -ten Teilchen gestreuten Vektors gegenüber dem von einem willkürlich ausgewählten ersten Teilchen gestreuten Vektor bedeutet. Für die gestreute Intensität folgt weiter, wenn wir auch noch die in (6) angegebenen zeitlichen Mittelwerte berücksichtigen

$$\begin{aligned} I \text{ prop. } \overline{e^2} &= a^2 \overline{\left\{ \sum_{n=1}^N \left(\cos 2\pi\nu t \cdot \cos 2\pi\nu \frac{l_n}{c} + \sin 2\pi\nu t \cdot \sin 2\pi\nu \frac{l_n}{c} \right) \right\}^2} = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sum_{n=1}^N \left\{ \cos^2 2\pi\nu \frac{l_n}{c} + \sin^2 2\pi\nu \frac{l_n}{c} \right\} + \frac{1}{2} a^2 \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^N \cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c}. \end{aligned} \quad (9)$$

Der Faktor in der geschweiften Klammer im ersten Gliede ist gleich eins, und da es sich um eine ganz regellose Verteilung der Teilchen handelt, und wir ausserdem annehmen wollen, dass N eine grosse Zahl ist, so können wir das zweite Glied wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{2} a^2 2 \binom{N}{2} \overline{\cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c}}. \quad (10)$$

Endlich erhalten wir also

$$I \text{ prop. } \overline{e^2} = \frac{1}{2} a^2 N + a^2 \binom{N}{2} \overline{\cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c}}. \quad (11)$$

Da wegen der regellosen Verteilung das Argument der trigonometrischen Funktion im zweiten Gliede alle möglichen Werte gleichmässig verteilt annehmen wird, so verschwindet deren Mittelwert, und wir erhalten

$$I \text{ prop. } \overline{e^2} = \frac{1}{2} a^2 N, \quad (12)$$

also das bekannte Resultat, dass bei einer regellosen Verteilung einfach die aus den von den einzelnen Teilchen gestreuten Vektoren sich ergebenden Intensitäten addiert werden müssen.

Ein grundverschiedenes Resultat erhalten wir dagegen, wenn die fraglichen N Teilchen so nahe beieinander liegen, dass die Wegunterschiede $l_n - l_m$ sehr klein im Verhältnis zu $c/\nu = \lambda$ sind. Dann folgt aus (11)

$$I \text{ prop. } \overline{e^2} = \frac{1}{2} a^2 N + a^2 \binom{N}{2} = \frac{1}{2} a^2 \{N + N(N-1)\} = \frac{1}{2} a^2 N^2. \quad (13)$$

In diesem Fall muss also die von einem Teilchen gestreute Intensität mit dem Quadrat der Zahl der Teilchen multipliziert werden, oder, anders ausgedrückt, im zuerst betrachteten Fall werden die Intensitäten, im letzteren dagegen die elektrischen Vektoren addiert.

Es gibt aber ausser dem betrachteten Fall, dass die streuenden Teilchen sehr nahe beieinander liegen, noch einen anderen, in dem das zweite Glied in (11) nicht verschwindet, und das ist der der Streurichtung, die einen sehr kleinen Winkel mit der Fortpflanzungsrichtung des einfallenden Lichtes einschliesst. In diesem Falle werden die Gangunterschiede $l_n - l_m$ klein in Verhältnis zu λ , auch dann, wenn die Teilchen nicht nahe beieinander liegen und deshalb folgt wieder unser Resultat (13). Bei materiell zusammenhängenden grösseren Teilchen ist diese Erscheinung, dass nämlich wenn diese Teilchen nicht mehr ganz klein im Verhältnis zu λ sind, die Streuung nach vorne bevorzugt auftritt, unter dem Namen Mie-effekt schon längst bekannt.

Bezüglich unserer Betrachtungen ist jedoch die Feststellung sehr wichtig, dass wenn es sich um N regellos verteilte Partikeln handelt und N ausserdem eine recht grosse Zahl ist, die Streuung seitwärts, also unter grossen Ablenkungswinkeln, proportional zu N , dagegen nach vorne, also unter ganz kleinen Ablenkungswinkeln, proportional zu N^2 erfolgt, d. h. dass die Streuung unter ganz kleinen Ablenkungswinkeln enorm stark bevorzugt wird und das ist der springende Punkt unserer ganzen Überlegung. In der Einleitung haben wir nämlich schon erwähnt, dass zur Deutung des Hubbleeffektes nur ein solcher Lichtzerstreuungseffekt in Frage kommen kann, bei dem Ablenkungen unter sehr kleinen Streuwinkeln sehr stark bevorzugt auftreten.

Man könnte hier einwenden, dass in einem Laboratoriumsversuch, in dem es sich um eine endliche Gasmasse handelt, die Verhältnisse tatsächlich so sein werden, im intergalaktischen Raum aber, wo es sich um eine unendlich ausgedehnte Gasmasse handelt, man den Ablenkungswinkel überhaupt nicht so klein wählen kann, dass der Mittelwert von

$$\cos 2\pi\nu \frac{l_n - l_m}{c} \quad (14)$$

nicht verschwindet. Das kann jedoch nicht der Fall sein. Wie wir sehen werden, muss die streuende Gasmasse den Rückstossimpuls übernehmen, und es ist aus rein theoretischen Gründen sehr unwahrscheinlich, dass das momentan im ganzen unendlich ausgedehnten Gasvolumen der Fall sein könnte. Wir müssen also unbedingt unser Gasvolumen in kleinere »Kohärenzgebiete« aufteilen. In diesem Punkt berührt unser Problem den ganzen Fragenkomplex über das Wesen des Lichtquants und der Quantenelektrodynamik. Abgesehen davon kann man aber auch schon deshalb nicht mit einer unendlichen Ausdehnung in diesem Falle rechnen, weil ja nur ein gewisser Teil einer Kugelwelle noch als eben betrachtet werden kann.

§ 2. Bezeichnen wir die Entfernung eines Spiralnebels mit L , die Zahl der streuenden Partikeln in der Volumeneinheit mit n und die im vorigen Paragraphen erwähnte lineare Ausbreitung des Kohärenzgebietes mit l . Bezüglich der Beschaffenheit der streuenden Partikeln wollen wir vorderhand noch keine Annahme einführen.

Da es sich in unseren Betrachtungen bloss um die Abschätzung der Grössenordnung handelt, so nehmen wir an, dass sich die mit einem Gangunterschiede von $\lambda/4$ gestreuten Vektoren noch gegenseitig verstärken. Für den dazu gehörenden maximalen Ablenkungswinkel ϑ folgt dann

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda/4}{l},$$

oder weil ϑ sehr klein ist,

$$\vartheta = \frac{\lambda}{4l}. \quad (15)$$

Die Grösse des kohärent streuenden Volumens sei $l^2\pi l$. (Da es sich nämlich bloss um die Abschätzung von Grössenordnungen handelt, so wäre eine genauere Hypothese über die Form dieses Gebietes sowieso uninteressant.) Die davon gestreute Lichtintensität ist dann

$$J \text{ prop. } (l^2\pi l)^2 n^2 \quad (16)$$

d. h.

$$J = Cl^6 \pi^2 n^2. \quad (17)$$

Es werden also $J/h\nu = N'$ Lichtquanten gestreut, wenn J die Intensität des gestreuten Lichtes bedeutet. Jedes Photon erleidet dabei einen Energieverlust. Zu dessen Berechnung bezeichnen wir mit m die Massen der streuenden Partikeln, die totale Masse, die im Kohärenzvolumen enthalten ist, wird dann $ml^3\pi n$. Aus der Erhaltung der Energie und des Impulses folgen die Gleichungen

$$h(\nu - \nu') = \frac{1}{2} ml^3 \pi n \nu^2, \quad (18)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \vartheta + ml^3 \pi n \nu \cos \varphi, \quad (19)$$

und

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \vartheta = ml^3 \pi n \nu \sin \varphi, \quad (20)$$

wo ν und ν' die Frequenzen des einfallenden und gestreuten Lichtquants, ϑ den Ablenkungswinkel des letzteren und φ ebenfalls den Ablenkungswinkel der ganzen streuenden Gasmasse bedeuten. v bedeutet die Rückstossgeschwindigkeit der streuenden Partikel.

Da es sich um sehr kleine Ablenkungswinkel handelt, so können wir $\sin \vartheta = \vartheta$ setzen, und da ausserdem das Lichtquant an der relativ sehr grossen Gasmasse fast wie an einer Wand reflektiert wird, so folgt

$$\varphi = \frac{180^\circ + \vartheta}{2} - \vartheta = 90^\circ - \frac{\vartheta}{2} \quad \text{also} \quad \sin \varphi = \cos \frac{1}{2} \vartheta.$$

Aus (20) erhalten wir also

$$\frac{h\nu'}{c} \vartheta = ml^3 \pi n \nu \cos \frac{1}{2} \vartheta = ml^3 \pi n \nu \left(1 - \frac{\vartheta^2}{8}\right) \quad (21)$$

und da $\vartheta^2/8$ wieder sehr klein ist

$$v = \frac{h\nu'}{ml^3 \pi n c} \vartheta. \quad (22)$$

(22) setzen wir jetzt in (18) ein :

$$h(\nu - \nu') = \frac{(h\nu')^2}{2ml^3 \pi n c^2} \vartheta^2 \sim \frac{(h\nu)^2}{2ml^3 \pi n c^2} \vartheta^2. \quad (23)$$

Setzen wir hier den maximalen Wert von ϑ aus (15) ein, so folgt für die grösste Frequenzänderung

$$h(\nu - \nu') = \frac{(h\nu)^2}{2ml^3\pi nc^2} \cdot \frac{\lambda^2}{16l^2}. \quad (24)$$

§ 3. Unsere nächste Aufgabe ist zu berechnen, wie oft ein Lichtquant gestreut wird. Für die Zahl der einfallenden Lichtquanten, die wir jetzt mit N bezeichnen, erhalten wir, wenn I die Intensität des einfallenden Lichtes bedeutet

$$N = \frac{Il^2\pi}{h\nu}. \quad (25)$$

Nach (2) erzeugt ein Volumen von der Grösse πl^3 , in dessen Volumeneinheit n Partikeln enthalten sind, welche einzeln die Polarisierbarkeit α besitzen, die Feldintensitäten

$$e(r) = \eta(r) = \frac{1}{rc^2} \left| \frac{d^2}{dt^2} (\pi l^3 n \alpha \mathfrak{E} \cdot \sin \vartheta_0) \right|. \quad (26)$$

ϑ_0 bedeutet hier den Winkel, den die Dipolachse (Richtung des elektrischen Vektors der einfallenden Lichtwelle) und die Streurichtung miteinander einschliessen, und \mathfrak{E} ist der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t. \quad (27)$$

Aus (27) und (4) folgt

$$I = \frac{c}{4\pi} [\overline{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E}}] = \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2. \quad (28)$$

Weiter erhalten wir aus (26) analog zu (28) für die gestreute Intensität in einer Richtung, die mit dem elektrischen Vektor der einfallenden Welle den Winkel ϑ_0 einschliesst

$$J'' = \frac{1}{r^2 c^4} (4\pi^2 \nu^2 \pi l^3 n \alpha)^2 \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2 \sin^2 \vartheta_0, \quad (29)$$

und für die ganze von unserem Volumen πl^3 kohärent gestreute Intensität, wenn wir ein räumliches Polarkoordinatensystem (ϑ, φ) einführen, dessen Achse die Richtung des einfallenden Lichtes ist

$$J' = \frac{1}{r^2 c^4} [4\pi^2 l^3 \nu^2 n \alpha]^2 \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2 \int_{\vartheta=0}^{\lambda/4l} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (30)$$

$\lambda/4l$ ist der in (15) berechnete Grenzwinkel für die hier betrachtete Art von Streuung. Führen wir ausserdem aus (28) den Wert von I ein, so folgt

$$\frac{J'}{I} = \frac{1}{c^4} [4\pi^3 l^3 v^2 n\alpha]^2 \int_{\vartheta=0}^{\lambda/4l} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (31)$$

Nehmen wir entsprechend den tatsächlich auftretenden Verhältnissen an, dass es sich nicht um linear polarisiertes sondern um natürliches Licht handelt, das wir durch zwei aufeinander senkrecht polarisierte Strahlen ersetzen und analog zur Definition von ϑ_0 jetzt die Winkel, den die elektrischen Vektoren der erwähnten zwei Teilstrahlen mit der Streurichtung einschliessen, mit ϑ_1 und ϑ_2 bezeichnen, so haben wir

$$\sin^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_2 = 2 - \cos^2 \vartheta_1 - \cos^2 \vartheta_2 = 1 + \cos^2 \vartheta, \quad (32)$$

weil ja die Richtungen der zwei elektrischen Vektoren und die Fortpflanzungsrichtung des einfallenden Lichtes aufeinander senkrecht stehen. Analog zu (27) haben wir jetzt

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{0x} \cos 2\pi vt \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_{0y} \cos 2\pi vt, \quad (33)$$

$$|\mathfrak{E}_{0x}| = |\mathfrak{E}_{0y}| \quad (34)$$

und entsprechend (28)

$$I = \frac{c}{8\pi} (\mathfrak{E}_{0x}^2 + \mathfrak{E}_{0y}^2); \quad \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_{0x}^2 = \frac{c}{8\pi} \mathfrak{E}_{0y}^2 = \frac{1}{2} I. \quad (35)$$

Statt (31) haben wir dann unter Berücksichtigung von (32)

$$\frac{J}{I} = \frac{1}{c^4} (4\pi^3 l^3 v^2 n\alpha)^2 \frac{1}{2} \int_0^{\lambda/4l} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (36)$$

Da jedoch $\lambda/4l$ sehr klein ist, so folgt für das Integral

$$\int_0^{\lambda/4l} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \cdot 2 \int_0^{\lambda/4l} \vartheta d\vartheta = \frac{\lambda^2 \pi}{8l^2}. \quad (37)$$

Endlich erhalten wir also aus (36) und (37) statt der auf linear polarisiertes

Licht sich beziehenden Formel (31), für einfallendes natürliches Licht

$$\frac{J}{I} = \frac{1}{c^4} (4\pi^3 l^3 \nu^2 n \alpha)^2 \frac{\lambda^2 \pi}{16 l^2}, \quad (38)$$

oder wenn wir mit $N = Il^2\pi/h\nu$ die Zahl der einfallenden und mit $N' = J/h\nu$ die der gestreuten Lichtquanten bezeichnen

$$\frac{N'}{N} = \frac{\pi^3 l^2 \nu^4 n^2 \alpha^2 \lambda^2}{c^4} = \frac{\pi^3 l^2 n^2 \alpha^2}{\lambda^2}. \quad (39)$$

(39) gibt also die Zahl der von unserem betrachteten Kohärenzgebiet gestreuten Quanten im Verhältnis zu den der einfallenden an. Im ganzen Lichtweg von der Länge L ist dieses Gebiet jedoch L/l -mal enthalten; für die ganze Zahl der entlang des Lichtweges infolge des betrachteten Prozesses gestreuten Quanten haben wir also

$$\mathfrak{N} = N' \frac{L}{l} \quad (40)$$

und daher für das Verhältnis von \mathfrak{N} zu N aus (39) und (40)

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{\pi^3 l L \nu^4 n^2 \alpha^2 \lambda^2}{c^4} = \frac{\pi^3 l L n^2 \alpha^2}{\lambda^2}. \quad (41)$$

§ 4. Unsere Ergebnisse (24) und (41) wollen wir jetzt mit der Erfahrung vergleichen. Die erste Bedingung, die erfüllt sein muss, ist jedenfalls, dass \mathfrak{N}/N eine sehr grosse Zahl sein muss, weil sich ja nur in diesem Falle die vielen kleinen Richtungsablenkungen herausmitteln können. Zuerst wollen wir annehmen, dass die streuenden Teilchen freie Elektronen sind. Die optische »Polarisierbarkeit« dieser freien Elektronen, die wir für α in (41) einsetzen müssen, erhält man bekannterweise am einfachsten, wenn man ein quasielastisch gebundenes Elektron betrachtet, auf das der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle einwirkt. Wenn wir noch mit k^2 die Konstante der quasielastischen Kraft bezeichnen, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi \nu t - k^2 x. \quad (42)$$

Löst man diese Differentialgleichung und nimmt dann an, dass k^2 gegen Null geht, so folgt endlich für die gesuchte optische Polarisierbarkeit des freien Elektrons

$$\alpha = - \frac{e^2}{4\pi^2 m} \frac{1}{v^2}. \quad (43)$$

Die Abschätzung der Grösse von α in der Umgebung der NaD-Linie liefert das Resultat

$$\alpha \sim -2 \cdot 10^{-23}. \quad (44)$$

Für l setzen wir vorerst (mangels einer besseren Hypothese) den grössten Gangunterschied ein, bei dem man noch Interferenzen feststellen konnte, also etwa 1,5 m, für L wollen wir eine Million Lichtjahre also rund 10^{24} cm einsetzen, das ist die Grössenordnung der kleinsten im intergalaktischen Raum vorkommenden Entfernungen zwischen zwei Spiralnebeln. Für λ benutzen wir wieder die Wellenlänge der NaD-Linie. Eine schwierigere Frage ist die Grössenordnung von n . Nach einer Zusammenstellung von Dunham [2] beträgt die Elektrodichte im interstellaren Raum 14,4 Elektronen pro cm^3 , diese Grösse wollen wir in (41) einsetzen, wir bemerken aber ausdrücklich, dass sich diese Angabe nicht auf den intergalaktischen, sondern auf den interstellaren Raum bezieht. Aus den angegebenen numerischen Werten folgt also endlich

$$\frac{\mathcal{N}}{N} \sim 3,46 \cdot 10^{-6}. \quad (45)$$

Wir sehen also, dass dieser Wert viel zu klein ist, weil ja die erste Bedingung für die Herausmittlung der Richtungsablenkungen die sein müsste, dass \mathcal{N}/N eine recht grosse Zahl ist.

Wir müssen noch die Frage beantworten, ob nicht die interstellaren Atome zu dem betrachteten Effekt noch einen bemerkbaren Beitrag liefern könnten. Nach den erwähnten Angaben von Dunham fallen auf ein cm^3 bloss 0,7 Wasserstoffatome, und da deren Polarisierbarkeit $6,63 \cdot 10^{-25}$ beträgt, so würde ihre Berücksichtigung unser Resultat (45) nur ganz unwesentlich beeinflussen. Ausserdem müssen entsprechend der Zahl der Elektronen, (da andere ionisierte Atome kaum eine Rolle spielen) ebenso viele Protonen vorhanden sein. Da jedoch nach (43) in der Formel der Polarisierbarkeit die Masse im Nenner steht, so ist deren Beitrag zu (45) ganz unbedeutend. Ebenfalls ganz unbedeutend sind die im interstellaren Raum vorhandenen Na, K, Ca und Ti Atome, wegen ihrer sehr geringen Zahl. Es sei ausserdem nochmals ausdrücklich hervorgehoben, dass sich die numerischen Angaben von Dunham nicht auf den intergalaktischen sondern auf den interstellaren Raum beziehen.

Vollständigkeitshalber wollen wir noch die Grössenordnung unserer Formel (24) abschätzen, die wir jetzt in der Form

$$\frac{h(\nu - \nu')}{h\nu} = \frac{h\nu}{2ml^3\pi nc^2} \frac{\lambda^2}{16l^2} = \frac{h}{32ml^5\pi n\nu} \quad (46)$$

schreiben. Setzen wir hier wieder für m die Masse eines Elektrons, für n die Elektronendichte 14,4 und für ν die Frequenz der Na D-Linie ein, so folgt

$$\frac{h(\nu - \nu')}{h\nu} \sim 1,2 \cdot 10^{-28}. \quad (47)$$

Dieser Zahlenwert wäre selbstverständlich nicht zu klein, wenn dazu ein entsprechend grosser Wert von (41) bzw. (45) gehören würde, was jedoch, wie wir gesehen haben, nicht der Fall ist.

§ 5. Zuletzt berechnen wir noch die von einer Partikel in alle Richtungen gestreute Intensität, woraus wir mit Hilfe der Gesamtzahl der im Lichtweg enthaltenen Partikeln, die ganze Lichtschwächung erhalten. Diese Grösse hängt zwar nicht mit dem in dieser Arbeit besprochenen Problem unmittelbar zusammen, gibt jedoch diesbezüglich eine gewisse Aufklärung, wie gross überhaupt die Teilchendichte im intergalaktischen Raum sein könnte, weil ja selbstverständlich diese Lichtschwächung nicht zu gross angenommen werden kann.

Es sei also wieder $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos 2\pi\nu t$ der elektrische Vektor der einfallenden Lichtwelle, mit Hilfe von (2) und (3) folgt dann für die von einer Partikel allseitig gestreute Lichtintensität

$$i'' = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^4 r^2} \left[\frac{d^2}{dt^2} (\alpha \mathfrak{E}) \right]^2 r^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (48)$$

wo wir wieder die in der Formel (31) benützten Bezeichnungen einführen. Nach Durchführung der Derivationen nach der Zeit und Berechnung des zeitlichen Mittelwertes analog zu (28) folgt weiter

$$i'' = \frac{1}{4\pi c^3} (4\pi^2 \nu^2 \alpha)^2 \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (49)$$

Handelt es sich nicht um linear polarisiertes sondern um natürliches einfallendes Licht, so zerlegen wir dieses wieder analog zu (33) in zwei aufeinander senkrecht linear polarisierte Komponenten, schreiben also

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{0x} \cos 2\pi\nu t \text{ und } \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_{0y} \cos 2\pi\nu t \quad (50)$$

und

$$|\mathfrak{E}_{0x}| = |\mathfrak{E}_{0y}|. \quad (51)$$

Statt des einen Winkels ϑ_0 führen wir jetzt wieder die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 ein, die eine willkürliche Streurichtung mit den Richtungen der elektrischen Vek-

toren der zwei linear polarisierten Komponenten einschliesst. Mit Hilfe von (32) erhalten wir dann aus (49) für die von einer Partikel (deren Polarisierbarkeit wir mit α bezeichnen) allseitig gestreute Lichtintensität im Falle von einfallendem natürlichen Licht

$$i' = \frac{1}{4\pi c^3} (4\pi^2 v^2 a)^2 \frac{1}{2} \mathfrak{E}_{0x}^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (52)$$

Die Integrationen können jetzt schon durchgeführt werden und unter Berücksichtigung von (35) folgt

$$i' = \frac{1}{c^4} (4\pi^2 v^2 a)^2 \frac{1}{2} I \left(2 + \frac{2}{3} \right) 2\pi = \frac{128}{3} \frac{\pi^5 a^2}{\lambda^4} I. \quad (53)$$

Bezeichnen wir wieder mit n die Zahl der fraglichen Partikeln in einem cm^3 der intergalaktischen Materie, so folgt für den hier auftretenden scheinbaren Absorptionskoeffizienten (Turbiditätskoeffizienten)

$$\tau = \frac{128}{3} \frac{\pi^5 a^2}{\lambda^4} n \quad (54)$$

und für die Lichtschwächung in einer Entfernung L

$$I = I_0 e^{-\tau L} = I_0 e^{-\frac{128}{3} \frac{\pi^5 a^2}{\lambda^4} n L}. \quad (55)$$

Zur Abschätzung der Grösse von τ nehmen wir wieder an, dass die fraglichen Partikeln Elektronen sind, dann müssen wir für a nach (44) $-2 \cdot 10^{-23}$ einsetzen; benützen wir ausserdem wieder für n die im interstellaren Raum festgestellte Elektronendichte $n = 14,4$, so folgt für die Grössenordnung von τ

$$\tau \sim 6 \cdot 10^{-24}. \quad (56)$$

Setzen wir für L wieder eine Million Lichtjahre, also rund 10^{24} cm ein, so folgt für den in (55) stehenden Exponenten

$$\tau L \sim 6 \quad (57)$$

also ein absurd grosser Wert. Wir sehen also, dass schon aus diesem Grund eine Elektronendichte im intergalaktischen Raum, von der Grössenordnung der im interstellaren Raum tatsächlich festgestellten, ganz unmöglich ist.

§ 8. Unsere Resultate wollen wir jetzt noch in die Form der bei der Besprechung des Hubbleeffektes benützten empirischen Zusammenhänge bringen, um die theoretischen Möglichkeiten zur Deutung der Rotverschiebung bequemer überblicken zu können.

Aus (41) und (46) folgt

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\mathfrak{N}}{N} \cdot \frac{h(\nu - \nu')}{h\nu} = \frac{\pi^3 L n \alpha^2 h}{32 m l^4 c \lambda}. \quad (58)$$

Setzen wir hier wieder die für Elektronen schon bei der Abschätzung der Grösse von (41) und (46) benutzten numerischen Werte ein und nehmen wieder an, dass L gleich einer Million Lichtjahre also rund 10^{24} cm ist, so folgt

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim 4,1 \cdot 10^{-34}, \quad (59)$$

was man aus (45) und (47) selbstverständlich auch unmittelbar erhält.

Fasst man den Hubbleeffekt tatsächlich als einen Dopplereffekt auf, so kann man ihn mit Hilfe der folgenden empirischen Formel beschreiben [3]:

$$V_{\frac{\text{km}}{\text{sec}}} = 580 \cdot 10^{-6} R_{pc}, \quad (60)$$

wo V die aus der Rotverschiebung berechnete radiale Geschwindigkeit in km und R_{pc} die Entfernung des fraglichen Spiralnebels ausgedrückt in Parsec bedeutet. (60) wollen wir jetzt in CGS-Einheiten umrechnen, es bedeute v die Radialgeschwindigkeit und L die Entfernung in diesen Einheiten, dann haben wir

$$v = 1,88 \cdot 10^{-17} L, \quad (61)$$

und da

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad (62)$$

ist, so folgt

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 6,29 \cdot 10^{-28} L. \quad (63)$$

Setzen wir hier noch $L = 10^{24}$ cm ein, so haben wir

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 6,29 \cdot 10^{-4}. \quad (64)$$

Ein Vergleich von (59) und (64) zeigt gleich, dass der besprochene Effekt zur theoretischen Deutung des Hubbleeffektes viel zu klein ist, wie wir das ja schon

erwähnt haben. An Hand der Formel (58) können wir aber jetzt leicht entscheiden, ob der Hubbleeffekt auf diesem Wege deutbar wäre, wenn wir für die in (58) stehenden Grössen andere numerische Werte annehmen würden, selbstverständlich so, dass man deswegen nicht mit anderen Erfahrungen in Widerspruch gerät.

Die Elektronendichte n geht linear in (58) ein, und es wäre deshalb ganz unmöglich, eine so hohe Elektronendichte im intergalaktischen Raume anzunehmen, dass (58) und (63) von derselben Grössenordnung werden. Abgesehen von der Absurdität einer so grossen Dichte im intergalaktischen Raum, würde daraus nach (54) ein unmöglich grosser scheinbarer Absorptionskoeffizient folgen. Wie wir im §5 gesehen haben, ist das ja schon der Fall, wenn man bloss die im interstellaren Raum festgestellte Elektronendichte noch im intergalaktischen Raum als angenähert gültig annehmen würde. Eine weitere Möglichkeit wäre für l' einen anderen Wert zu benützen. Wie wir schon am Anfang dieser Arbeit besprochen haben, ist die richtige Wahl der Grössenordnung von l der schwierigste Punkt unserer theoretischen Untersuchung. Doch müssten wir um eine grössenordnungsmässige Übereinstimmung von (58) und (63) erreichen zu können, l so klein wählen, dass das schon einfachen Laboratoriumsversuchen (z. B. der Beobachtung der Lichtzerstreuung von grösseren Teilchen) widersprechen würde. Davon abgesehen, würde aber auch eine entsprechende Wahl der Grösse von l nichts nützen, weil ja neben der verlangten numerischen Übereinstimmung von (58) und (63) die Formel (41) einen grossen numerischen Wert liefern müsste, in (41) steht jedoch l im Zähler. Die entgegengesetzte Möglichkeit wäre, anzunehmen, dass l recht gross, also etwa nahe der Grössenordnung von L wäre, auf diese Möglichkeit haben wir schon am Ende des §1 hingewiesen. Bezeichnen wir diesen neuen Wert von l mit L' , dann haben wir statt (41)

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{\pi^6 L' L n^2 a^2}{\lambda^2}. \quad (41a)$$

Bei dieser Wahl von l könnte also unsere Bedingung, dass (41) eine recht grosse Zahl sein soll, tatsächlich erfüllt sein. Wie wir ebenfalls schon erwähnt haben, entsteht aber jetzt die Schwierigkeit, dass es jedenfalls schwer denkbar ist, dass das Lichtquant auf alle Atome einer grossen Gasmasse gleichzeitig Impuls überträgt. Nehmen wir dagegen an, dass das fragliche Lichtquant nur einem Atom Impuls abgibt, so müssen wir unsere Formel (46) abändern, wie das aus der Herleitung dieser Formel unmittelbar erhellt. Erstens fällt dann das Produkt $l^3 \pi n$ im Nenner des ersten Faktors weg bzw. wird gleich eins und im zweiten Faktor steht jetzt im Nenner L'^2 statt l^2 . Wir erhalten also

$$\frac{h(\nu - \nu')}{h\nu} = \frac{h\nu}{2mc^2} \frac{\lambda^2}{16L'^2}. \quad (46a)$$

Der erste Faktor wird zwar infolge des Wegbleibens des Produktes $l^3\pi n$ im Nenner grösser, der zweite dagegen viel kleiner, so dass auf diesem Wege kaum eine bessere numerische Übereinstimmung zwischen (58) und (63) erreicht werden kann. Unsere jetzt besprochene Annahme über die Grösse von l könnte jedoch eine Bedeutung haben in der weiter unten zu besprechenden Rolle der Neutrinos bei der Verursachung des Hubbleeffektes.

Alles was wir bis jetzt in bezug auf Elektronen gesagt haben, muss sich a fortiori auch auf schwerere Teilchen (Mesonen, Atome usw.) beziehen. In (58) steht ja die Masse m im Nenner und das Quadrat der Polarisierbarkeit, die ja bei solchen Teilchen geringer ist, im Zähler. Abgesehen davon ist nach unserem heutigen Wissen, das Vorhandensein von Mesonen im intergalaktischen Raum sehr unwahrscheinlich. Damit haben wir also bewiesen, dass Elektronen oder noch schwerere Teilchen bei der Deutung des Hubbleeffektes keine Rolle spielen können. Die Verhältnisse sind jedoch ganz anders im Falle der Neutrinos. Erstens ist uns deren weiteres Schicksal, abgesehen vielleicht von einer ganz neuen Untersuchung von Reines und Cowan [4] ganz unbekannt. Da es jedoch bis jetzt nicht gelungen ist zu zeigen, dass jegliche Materie die Neutrinos bemerkbar absorbieren würde, so ist die Hypothese nicht von der Hand zu weisen, dass Neutrinos im intergalaktischen Raum vorhanden sein könnten. Zweitens können wir bis jetzt für die Masse und das magnetische Moment der Neutrinos nur obere Grenzen angeben, und es ist uns nicht bekannt, ob das elektromagnetische Feld auf Neutrinos überhaupt und wenn ja in welchem Masse einwirkt. Ist diese Einwirkung überhaupt nicht vorhanden, so ist $\alpha = 0$, und damit wäre die Rolle der Neutrinos bezüglich unserer theoretischen Untersuchung ganz bedeutungslos. Ist das jedoch nicht der Fall, so wäre es schon möglich, dass Neutrinos hier eine Bedeutung haben könnten. Dazu müssen wir folgendes beachten: (41) müsste, um den Hubbleeffekt auf diesem Wege deuten zu können, eine recht grosse Zahl sein, dagegen darf (54) nicht gross werden, weil ja dann der intergalaktische Raum überhaupt nicht durchsichtig wäre. In (41) steht das Produkt $n^2\alpha^2$ als Faktor, in (54) dagegen na^2 . Durch entsprechende Wahl von α und n können wir tatsächlich erreichen, dass $n^2\alpha^2$ sehr gross wird, na^2 dagegen klein bleibt, dazu muss nur α recht klein, dagegen n gross sein, was physikalisch garnicht unvernünftig ist. Der Faktor na^2 steht ausserdem auch noch in unserem Endresultat (58) und da wir postuliert haben, dass dieser Faktor klein sein soll, so könnte man denken, dass diese Hypothese auch unser Endresultat viel zu klein macht. Das ist jedoch nicht der Fall, weil in (58) die Masse des Neutrinos (m) im Nenner steht; wählen wir die als recht klein, was wieder physikalisch sehr plausibel ist, so kann (58) einen verhältnismässig grossen numerischen Wert annehmen. Unser Postulat, dass (54) klein sein soll, wird dadurch nicht beeinflusst, weil (54) von m unabhängig ist.

Solange wir also über die physikalischen Konstanten der Neutrinos nichts Näheres erfahren, kann die Möglichkeit, dass der Hubbleeffekt von Neutrinos

verursacht wird, nicht ausgeschlossen werden. Im Zusammenhang mit dieser Frage sei nur noch erwähnt, dass man eine gewisse Lichtschwächung im intergalaktischen Raume tatsächlich beobachtet hat. Statt der theoretischen Formel

$$\log N = 0,60 m + \text{konst}, \quad (65)$$

wo N die Anzahl der Nebel pro Quadratgrad bis zur scheinbaren Helligkeit m bedeutet, erhielt nämlich *Hubble* [5] aus seinen Beobachtungen die empirische Formel

$$\log N = 0,501 m - 7,371. \quad (66)$$

Eine weitere theoretische Möglichkeit zur Deutung des Hubbleeffektes, die wir nicht ganz unerwähnt lassen wollen, wäre anzunehmen, dass dieser Effekt eine Folge der Streuung von Licht an Licht ist. Dazu wäre notwendig, dass die verhältnismässig grossen Quanten des sichtbaren Lichtes sehr oft mit ganz kleinen Quanten »zusammenstossen«, und die vielen kleinen Richtungsablenkungen sich demzufolge herausmitteln. Bezüglich der Streuung von Licht an Licht liegen nur die theoretischen Arbeiten von *Euler* und *Gockel* [6] und *Karplus* und *Neuman* [7] vor, experimentell ist diesbezüglich garnichts bekannt. Die postulierten vielen kleinen Quanten könnten im intergalaktischen Raum dagegen tatsächlich vorhanden sein, weil ja nach den neuesten Untersuchungen die starken Radioquellen im Schwan und im Perseus von im Zusammenstoss sich befindenden Galaktiken herrühren [8]. Unsere Kenntnisse über diese letztere Deutungsmöglichkeit sind jedoch sowohl theoretisch wie empirisch viel zu mangelhaft, als dass wir darüber etwas Positives aussagen könnten. Man könnte übrigens auch die Frage umkehren und aus der Hypothese, dass der Hubbleeffekt eine Folge der Streuung von Licht an Licht ist, die Grösse dieser Wechselwirkung berechnen. Es sei nur noch erwähnt, dass nach dieser letzteren Auffassung der Hubbleeffekt eine (kleine) Näherung der Lichtquanten-Energie zur Äquipartition wäre.

Zusatz bei der Korrektur

Nach dem Einsenden dieser Arbeit (20. I. 1954.) ist eine Veröffentlichung von *E. Finlay-Freundlich* (Phil. Mag. 45, 303, 1954) erschienen, die bezüglich des hier besprochenen Problems nicht unerwähnt bleiben kann. Der genannte Verfasser findet, dass die Rotverschiebung der Spektrallinien der zur Gruppe des Orionnebels gehörenden B-Sterne rund zehnmal so gross ist, als das aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgen würde. *Finlay-Freundlich* vermutet, dass diese Rotverschiebung eine Folge des Energieverlustes der Photonen im Strahlungsfelde des Sternes ist und findet die folgende halbempirische Formel

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = - AT^4 l,$$

wo A eine Konstante, T die Temperatur des Strahlungsfeldes und l die Länge

des Lichtweges im Strahlungsfelde ist. Finlay—Freundlich zeigt, dass diese Formel auch in den anderen Spektraltypen gültig ist. Eine sehr wichtige Konsequenz dieser Untersuchung ist, dass wenn die oben stehende Formel tatsächlich richtig ist, man den Hubbleeffekt damit deuten kann, dazu muss nur eine Temperatur des Strahlungsfeldes im intergalaktischen Raum von $1,9-6^1$ K angenommen werden.

D. ter Haar bespricht in einer darauffolgenden Arbeit (Phil. Mag. 45, 320, 1954) die Resultate von Finlay-Freundlich und kommt zu den Resultaten, dass weder der Compton-Effekt, noch die schon erwähnte von Euler und Gockel berechnete Wechselwirkung zwischen Photonen die erwähnten Ergebnisse erklären könnte. D. ter Haar hält es noch für das Wahrscheinlichste, dass es sich um eine (unbekannte) Wechselwirkung zwischen Photonen und Elektronen handelt.

Ausserdem sei es noch erwähnt, dass man nach neuen sich auf die Cephei Veränderlichen beziehenden Untersuchungen die Hubblesche Expansionskonstante wahrscheinlich halbieren muss (vgl. P. ten Bruggencate, Naturwiss. 41, 173, 1954), doch bleiben davon unsere Berechnungen, in denen es sich nur um die Abschätzung von Grössenordnungen handelt, unberührt.

LITERATUR

1. Vgl. E. Hubble, Das Reich der Nebel. Fr. Vieweg, Braunschweig 1938. (Deutsche Übersetzung des Werkes: The Realm of the Nebulae).
2. T. Dunham, Proc. Amer. Phil. Soc. 81, 227, 1939.
3. Vgl. W. Becker, Sterne und Sternsysteme. 2. Aufl. Th. Steinkopf, Dresden und Leipzig, 1950.
4. F. Reines u. C. L. Cowan, Phys. Rev. 92, 830, 1953.
5. E. Hubble, Astrophys. Journ. 84, 517, 1936.
6. H. Euler u. B. Gockel, Die Naturwiss. 23, 246, 1935.
7. R. Karplus u. M. Neuman, Phys. Rev. 83, 776, 1951.
8. Vgl. z. B. den zusammenfassenden Bericht von M. Laffineur, Onde Électrique, 33, 173, 1953.

РАССЕЯНИЕ СВЕТА И ЭФФЕКТ HUBBLE

Т. Нейгебауэр

Резюме

С теоретической точки зрения рассматривается вопрос о том, не обуславливается ли красное смещение спектральных линий спиральных туманностей все-таки каким-либо эффектом рассеяния света. Первое условие для такого рода теоретического истолкования это — малость угла рассеяния в отдельных актах и многократность актов рассеяния, вследствие которых отклонения светового кванта усредняются. В работе показано существование эффекта, не учтенного до настоящего времени, в теории рассеяния света, в межгалактическом пространстве. Оценка порядка величины эффекта показывает, что этот эффект весьма мал, если предположить, что рассеяния на электронах играют основную роль, или необходимо предполагать весьма большую электронную плотность. — Эти результаты а fortiori относятся и к более тяжелым частицам (мезонам, атомам и т. д.). Интересный результат получается в случае нейтрино. Во-первых весьма легко представить себе, что нейтрино могут находиться в межгалактическом пространстве и во-вторых легко объяснить эффект Hubble на основе изложенного представления, если соответствующим образом выбрать до настоящего времени неизвестные постоянные нейтрино. До тех пор, пока о нейтрино более подробные сведения не имеются, объяснение эффекта Hubble по этому пути нельзя исключить. В конце работы сделаны некоторые замечания, связанные с изложенными здесь вопросами, относительно рассеяния света на свете.

FREDHOLM THEORY OF HEITLER'S INTEGRAL EQUATION

By

S. N. BISWAS

DEPARTMENT OF THEORETICAL PHYSICS, INDIAN ASSOCIATION FOR THE CULTIVATION OF
SCIENCE, CALCUTTA

(Presented by L. Jánossy—Received 1. II. 1954)

The Fredholm theory of non-homogeneous integral equation has been applied to Heitler's integral equation for radiation damping in scattering processes which are beset with divergence difficulties. The general convergence of the solution has been discussed, from the mathematical point of view. The Fredholm solution has been obtained for various meson-nucleon scattering processes and it has been found that the results agree with those obtained otherwise.

1. Introduction

Various methods have been formulated by different authors to obtain an approximate solution of Heitler's integral equation. Of these, variational techniques [1] are of frequent use. But the serious objection to this technique is that it fails to account for the accuracy of the solution. To circumvent this difficulty an iterative procedure was developed by the author [2]. It was found that in some cases the solution agrees with the exact solution already known.

Since Heitler's integral equation is closely related to Fredholm's integral equation of the second kind, it is of particular interest to study Heitler's integral equation from the point of view of Fredholm's theory of solution.

In the following sections we have indicated the method of solution of the equation and then we have shown the applicability of the method in various scattering processes.

2. Fredholm Solution

In this section we obtain the Fredholm Solution [3] of Heitler's integral equation of radiation damping namely,

$$(\kappa, \kappa_0) = g(\kappa, \kappa_0) + \lambda \int g(\kappa, \kappa') f(\kappa', \kappa_0) d\Omega'; \quad \lambda = \frac{i\kappa}{4\pi}, \quad (2.1)$$

where $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ is the scattering amplitude in Born's first approximation, $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ the kernel of the integral equation and $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ which we are to find out, the scattering amplitude including radiation reaction.

The Fredholm solution of (2.1) is given by

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \lambda \int \frac{D(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \lambda)}{d(\lambda)} g(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) d\Omega_h, \quad (2.2)$$

where the Fredholm resolvent $D(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \lambda)$ and Fredholm determinant $d(\lambda)$ are given by

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{h}; \lambda) = g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} D_n(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \quad (2.3)$$

$$d(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n!} \lambda^n, \quad (2.4)$$

with

$$D_n(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \int \dots \int \begin{vmatrix} g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) & g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) & \dots & g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \\ g(\mathbf{x}_1, \mathbf{h}) & g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(\mathbf{x}_n, \mathbf{h}) & g(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \dots & g(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{vmatrix} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n \quad (2.5)$$

and

$$a_n = \int \dots \int \begin{vmatrix} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \dots & g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ g(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & g(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \dots & g(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & g(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) & \dots & g(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{vmatrix} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n. \quad (2.6)$$

For the convergence of the Fredholm solution it is required to show that the series (2.3) and (2.4) are convergent.

For (2.4), we see that, as the scattering amplitude $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ is a continuous function of scattering angle, we have $|g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')| < M$, where M is independent of angle. Again with the aid of Hadamard's lemma [3] we have

$$|a_n| < n^{n/2} (2M)^n \pi^{2n};$$

writing

$$n^{n/2} (2M)^n \pi^{2n} = (n!) b_n$$

we see

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n \text{ is absolutely convergent,}$$

since

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1}/b_n) \rightarrow 0.$$

Thus the series $d(\lambda)$ is convergent for all values of λ and an integral function of λ .

Likewise we can prove the convergence of $D(\kappa, \mathbf{h}; \lambda)$.

Now it can be easily verified [3] that if the kernel of the integral equation (2.1) namely, $g(\kappa, \kappa')$, be capable of expanding in the form

$$g(\kappa, \kappa') = \sum_{m=1}^n f_m(\kappa) g_m(\kappa'),$$

then $d(\lambda)$ and $D(\kappa, \mathbf{h}; \lambda)$ are polynomials in λ of degree n . Thus if

$$g(\kappa, \kappa') = g_1(\kappa) g_2(\kappa'),$$

then

$$d(\lambda) = 1 - A\lambda$$

and

$$D(\kappa, \mathbf{h}; \lambda) = \lambda g_1(\kappa) g_2(\kappa'),$$

where

$$A = \int g_1(\kappa) g_2(\kappa) d\Omega.$$

The corresponding solution of the integral equation (2.1) is given by

$$f(\kappa, \kappa_0) = g(\kappa, \kappa_0) + \frac{\lambda g_1(\kappa)}{1 - A\lambda} \int g_2(\kappa') g(\kappa', \kappa_0) d\Omega'. \quad (2.7)$$

In the following sections we will employ this method to find out solutions of the Heitler integral equation corresponding to meson-nucleon scattering processes.

3. Examples

(3.1) *The scattering of negative π -meson by proton* (using pseudoscalar meson field).

We will show here that the Fredholm solution (2.7) gives the exact solution as obtained previously [1, 2] by the variational or iterational processes.

The matrix element for this process may be written as

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\kappa} | G | \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\kappa}_0) = (\bar{u} (a_1 + a_2 \gamma_4) u_0) / (2\varepsilon_0 (W_0^2 - M^2)),$$

where \bar{u} and u_0 are the usual Dirac spinors corresponding to the four momenta \mathbf{p} and \mathbf{p}_0 respectively. $\boldsymbol{\kappa}$ and $\boldsymbol{\kappa}_0$ are the final and initial four-momenta of the meson, and $\varepsilon_0 = (\mu^2 + q^2)^{1/2}$, where q is the magnitude of the momentum of either particle and μ the meson mass. W_0 is the total energy of the system and M is the nucleon mass.

$$a_1 = f^2 M; \quad a_2 = f^2 W_0$$

in the case of pseudoscalar coupling.

Writing

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\kappa} | G | \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\kappa}_0) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \bar{u} g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) u_0,$$

the Heitler equation reduces to

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{iq}{32\pi^2 W_0} \int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (-i\gamma_\mu p'_\mu + M) f(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0). \quad (3.11)$$

Here the kernel of the equation is $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Lambda(\mathbf{p}')$ which can be expressed as the product of two functions $g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p}')$, where

$$g_1(\mathbf{p}) = (a_1 + a_2 \gamma_4) / (2\varepsilon_0 (W_0^2 - M^2)) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$$

and

$$g_2(\mathbf{p}') = (-i\gamma_\mu p'_\mu + M) = \Lambda(\mathbf{p}').$$

Thus the solution (2.7) can be easily applied to the solution of (3.11). Hence obtaining for A

$$A = \int d\Omega g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p}),$$

we get

$$A = 4\pi g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (E_0 \gamma_4 + M);$$

writing

$$\lambda = iq / (32\pi^2 W_0)$$

we get the solution

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda g_1(\mathbf{p})}{1 - A\lambda} \int g_2(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) d\Omega' = \frac{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)}{(1 - A\lambda)}, \quad (3.12)$$

noting that

$$g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = g_1(\mathbf{p}).$$

This is the solution as obtained by other methods. It may be mentioned that by actual substitution of the value (3.12) for $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ in the equation (3.11) we easily show that it is the exact solution. The scattering cross-section is proportional to $|f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)|^2$.

(3.2). The scattering of π^+ -meson by proton

We consider here the scattering of a charged scalar meson by a proton using scalar meson field with vector coupling.

The relevant matrix element for this process is given by

$$(\mathbf{p}, \kappa | G | \mathbf{p}_0, \kappa_0) = -i(g^2/\mu^2) \bar{u}(\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}) u_0,$$

and in our reference system,

$$\mathbf{p} + \kappa = \mathbf{p}_0 + \kappa_0 = 0; \quad \varepsilon = (\mu^2 + q^2)^{1/2}; \quad q = |\mathbf{p}| = |\kappa| = |\mathbf{p}_0| = |\kappa_0|,$$

where $\mathbf{p}, \kappa, \mathbf{p}_0, \kappa_0, \varepsilon, \mu$ and q refer to the same values as in the last section.

Writing $(\mathbf{p}, \kappa | G | \mathbf{p}_0, \kappa_0) = (\bar{u} g u_0)$ and with a similar definition of $(\bar{u} f u_0)$, we have for the Heitler integral equation for this process the following:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{iq}{32\pi^2 W} \int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (-i\gamma_\mu p'_\mu + M) f(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0). \quad (3.21)$$

Here the kernel of the equation is given by

$$i(g^2/\mu^2) (\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}) (-i\gamma_\mu p'_\mu + M); \quad \mu = 1, \dots, 4,$$

which can be expressed as the product of two functions of \mathbf{p} and \mathbf{p}' as

$$g_1(\mathbf{p}) = (ig^2/\mu^2) (\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}); \quad g_2(\mathbf{p}') = (-i\gamma_\mu p'_\mu + M).$$

Hence we may use (2.7) as the solution of (3.21). Writing

$$A = \int d\Omega g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p})$$

we have the value of A :

$$A = 4\pi (-ig^2/\mu^2) (\gamma_4 \varepsilon) (\varepsilon_0 \gamma_4 + M) - g^2.$$

Putting $\lambda = (iq/32\pi^2 W)$ we get the solution of the equation as follows :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda g_1(\mathbf{p})}{(1 - A\lambda)} \int g_2(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) d\Omega' = \\ &= \frac{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)}{(1 - A\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

since the integral, $\int g_2(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) d\Omega'$ gives the same value as that of A and noting that $g_1(\mathbf{p})$ and $g(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0)$ are identical. That this is the exact solution may easily be verified by actual substitution in the integral equation. We may also mention that using the variational technique [1] of *Goldberger*, we get the same solution.

Taking for the trial solution $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ we have the following solution for $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \\ &+ \frac{\lambda \left[\int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) \right]^2}{\int d\Omega' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0) - \lambda \int \int d\Omega' d\Omega'' g(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A(\mathbf{p}') g(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') A(\mathbf{p}'') g(\mathbf{p}'', \mathbf{p}_0)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

with

$$\begin{aligned} \lambda &= (iq/32\pi^2 w) \quad \text{and} \quad A(\mathbf{p}') = (-i\gamma_\mu p'_\mu + M); \\ A(\mathbf{p}'') &= (-i\gamma_\mu p''_\mu + M). \end{aligned}$$

Writing

$$A = (-ig^2/\mu^2) \int d\Omega (\gamma_4 \varepsilon - \gamma \mathbf{p}) (-i\gamma_\mu p_\mu + M)$$

we see on putting the value of $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ in the numerator and denominator of (3.23) that (3.23) reduces to

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda \cdot [g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) A]^2}{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \cdot A - \lambda g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \cdot A^2} = \frac{g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0)}{1 - A\lambda}$$

which is the same as (3.22).

The scattering cross-section is proportional to

$$|g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) / (1 - A\lambda)|^2.$$

(3.3) *Scattering of π^- -meson by neutron. (Non-relativistic limit.)*

We conclude the section by considering the scattering of a π^- -meson using pseudoscalar meson theory with pseudovector coupling in the non-relativistic limit.

The relevant matrix element for this process may be given by

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = (\mathbf{p} | G | \mathbf{p}_0) = (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0),$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the usual spin-matrix.

The corresponding Heitler integral equation may be written as

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0) + \lambda \int d\Omega' (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') f(\mathbf{p}', \mathbf{p}_0), \quad (3.31)$$

where

$$\lambda = (ig^2 q) / (16\pi^2 \mu^2 \varepsilon_0).$$

Hence the kernel of the equation, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')$, can be expressed as the product of two functions, namely,

$$g_1(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \text{ and } g_2(\mathbf{p}') = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}').$$

Hence we can use (2.7) as the solution of (3.31).

Determining the value of $A = \int d\Omega g_1(\mathbf{p}) g_2(\mathbf{p})$ we get $A = 4\pi q^2$, where q is the magnitude of the absolute value of the momentum. Now,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) &= (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0) + \frac{\lambda (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{1 - A\lambda} \int (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') d\Omega' (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0) \\ &= (g^2 / 2\mu^2 \varepsilon_0) \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_0)}{1 - (ig^2 q^3 / 4\pi\mu^2 \varepsilon_0)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

That (3.32) is an exact solution may be verified by actual substitution in the integral equation (3.31).

It may be mentioned that the solution (3.32) is not in agreement with that obtained by Goldberger using the variational technique [1].

In conclusion the author wishes to record his sincere gratitude to Dr. D. Basu for his valuable counsel in the preparation of this paper.

REFERENCES

1. C. F. Hsueh and S. T. Ma, Phys. Rev. **67**, 303, 1945; M. L. Goldberger, Phys. Rev. **84**, 929, 1951.
2. S. N. Biswas, Phys. Rev. **91**, 1026, 1953, Phys. Rev. **93**, 1767, 1954.
3. E. T. Whittaker and G. N. Watson, Modern Analysis, pp. 211, see also Courant-Hilbert, Methoden der Math. Physik. pp. 121—124.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФРЕДГОЛМА
К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ГЕЙТЛЕРА

С. Н. Бисвас

Резюме

Теория Фредголма для нелинейных интегральных уравнений была применена к интегральному уравнению Гейтлера, описывающему радиационное затухание в процессах рассеяния. В уравнении Гейтлера имеются большие трудности расходимости. С математической точки зрения была исследована сходимость решения. Решение, полученное на основе теории Фредголма, было применено к процессу рассеяния мезонов-нуклеонов. Результаты, полученные таким образом, хорошо согласуются с результатами, полученными с помощью других методов.

MIKROPHOTOMETRISCHE MESSUNGEN AN ELEKTROLUMINESZENTEN SILIZIUMKARBID- KRISTALLEN*

Von

G. SZIGETI, G. T. BAUER, J. WEISZBURG

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE FERNMEDETECHNISCHE INDUSTRIE, BUDAPEST

(Eingegangen : 17. II. 1954)

Die Verfasser arbeiteten ein Verfahren und ein Apparat aus, mit dessen Hilfe die Lichtintensität und das Spektrum der unter dem Mikroskop betrachteten elektrolumineszenten Kristalle mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 15\%$ ausgemessen werden kann.

1. *Einleitung*

Bei der Untersuchung von Fluoreszenzerscheinungen, insbesondere bei der Untersuchung der sogenannten elektrolumineszenten Kristalle, besteht die Notwendigkeit, die Lichterscheinung von einzelnen Kristallen zu untersuchen. Die Apparatur, welche bei der Aufnahme von Lumineszenzspektren vielfach verwendet wurde, eignete sich infolge Lichtmangels nicht für die Untersuchung von einzelnen Kristallen [1]. Wir mussten also ein Mikrospektrophotometer entwickeln, mit dem die Spektren einzelner Körnchen unter dem Mikroskop ausgemessen werden konnten. Zur Bestimmung des Wirkungsgrades des Leuchtens der Kristalle, mussten wir die einzelnen Mikrokristalle unter dem Mikroskop photometrieren. Für solche Untersuchungen wurde in unserem Institut bereits ein Mikrophotometer ausgearbeitet und von einem unserer Mitarbeiter beschrieben [2]. Diese letztgenannte Anordnung bewährte sich sehr gut bei der Aufnahme von Spektren von einzelnen lumineszenten Körnchen, war jedoch nicht geeignet für die Untersuchung von elektrolumineszenten Kristallen, da die elektrischen Kontakte und Zuleitungen die Beobachtung der Lichterscheinung stark störten.

2. *Beschreibung der Apparatur*

Anlehnend an die erwähnte Konstruktion wurde ein neues Mikrophotometer entwickelt, mit welchem die Kristalle in Durchsicht betrachtet werden konnten und die elektrischen Kontakte auf der unteren, vom Objektiv abgekehrten Seite angebracht wurden. Die neue Anordnung ist aus Abb. 1 und 2 ersichtlich.

Zwecks Untersuchung wurde der Kristall (7) mit Hilfe der Nadel (8) gegen die Bohrung des massiven Kupferstabes (6) geklemmt. Das andere Ende

* Vorgetragen am I. Ungarischen Physikerkongress, Budapest, 1953.

des Kupferstabes (6) ragt in den Ofen (5). Der Stab war zwischen Ofen und Kristall mit Asbestschnur wärmeisoliert. Die Messung der Temperatur des Kristalls erfolgt mit Hilfe eines Thermoelementes (9) und die Ablesung am

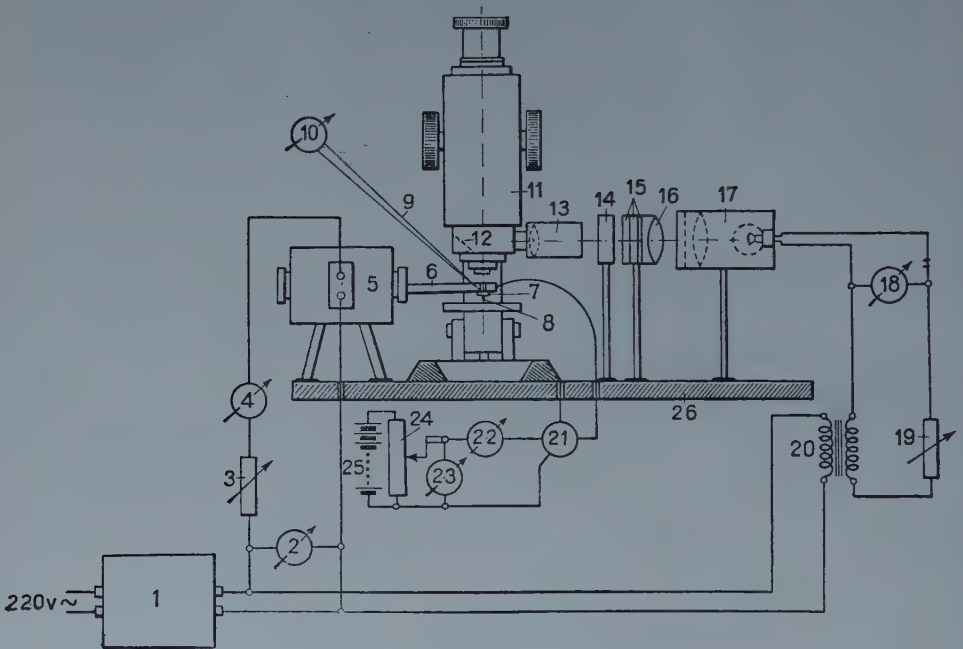


Abb. 1



Abb. 2

Galvanometer (10). Die am Behrührungspunkt zwischen Kristall (7) und Nadel (8) entstehende Lumineszenzerscheinung kann durch die Bohrung im Stab (6) untersucht werden.

Die Messung des Lichtes geschah durch ein Mikroskop, dessen Sehfeld mit der Lichtquelle (17) beleuchtet wurde. Das Licht der Lichtquelle wurde durch das Linsensystem (13, 16) mit Hilfe eines Spiegels (12) innerhalb des Mikroskops zum Okular projiziert. Im Okular also sehen wir übereinander

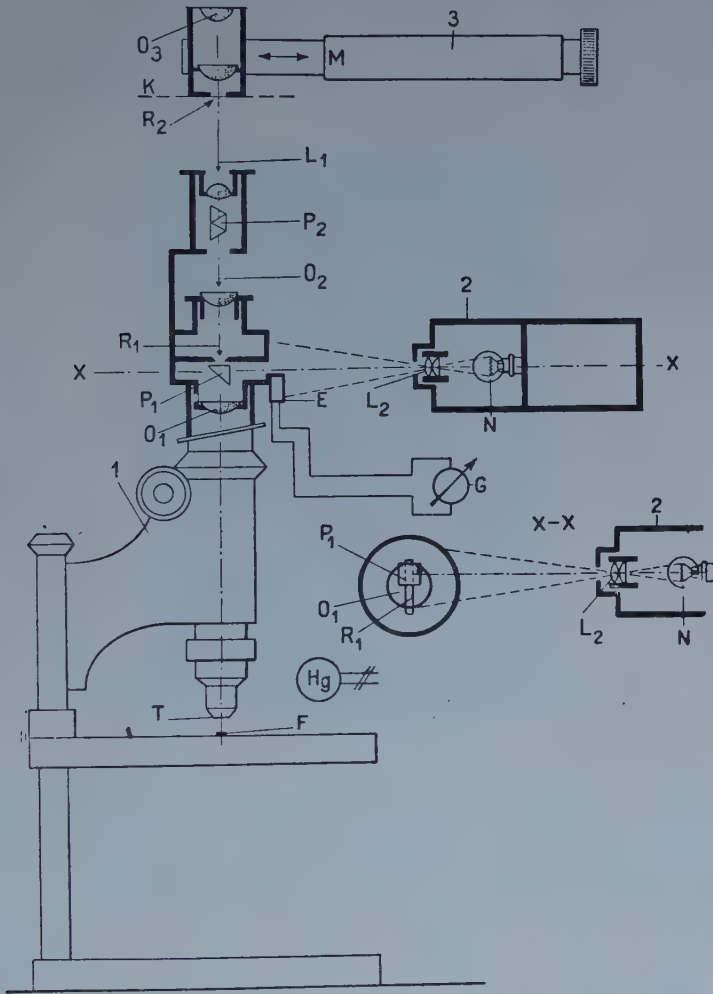


Abb. 3

superponiert den leuchtenden Kristall und den Hintergrund. Mit Hilfe eines Graukeils (14) konnte die Helligkeit des Hintergrundes und des Kristallbildes ausgeglichen werden, und so war die Lichtstärke der Lumineszenzerscheinung eindeutig bestimmbar. Die zur Untersuchung nötige Spannung wurde dem Kristall und der Nadel aus einer Batterie (25) über einen Spannungsteiler (24) zugeführt. Die Strom- und Spannungswerte wurden mit dem Mikroampermeter

(22) und mit dem Voltmeter (23) gemessen. Die Polarität der angelegten Spannung konnte während des Messens mit Hilfe eines Kommutators (21) umgepolt werden. Der Strom für die Normallampe und für den Ofen — welcher zur Regelung der Kristalltemperatur dient — wurde dem Spannungsstabilisator (1) entnommen.

Zur Aufnahme von Spektren mikroskopischer Lichtquellen oder anderer mikroskopischer Objekte, wurde von der Firma Zeiss ein Mikrospektralokular entwickelt. Mit diesem Gerät war die qualitative Beobachtung der Spektren möglich. Diese Apparatur wurde nun umgearbeitet für die subjektive Messung

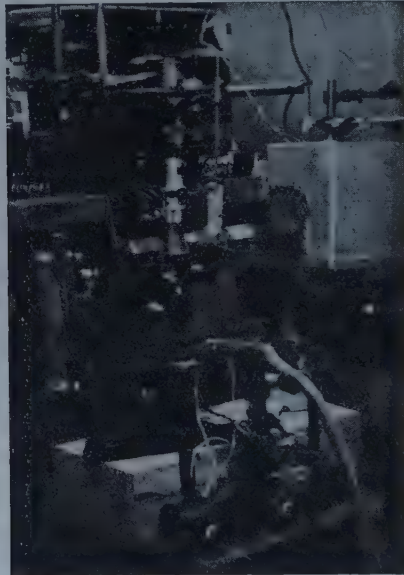


Abb. 4

der spektralen Energieverteilung der Strahlung von Kristallen. Das z. B. durch *König* und *Martens* angegebene Verfahren für den Ausgleich der Lichtstärke des Objektivs und einer Normallichtquelle durch Polarisierung, wurde durch eine semiobjektive Methode ersetzt. Die Lichtstärke der Normallichtquelle wurde nämlich durch eine Irisblende soweit abgeblendet, bis die Intensität an dem beobachteten Spektralband der beiden Lichtquellen gleich gefunden wurde. In diesem Zustand wurde die Intensität der Normallichtquelle durch ein Lichtelement gemessen. Die Photographie des Photometers zeigt Abb. 4. Die Wirkungsweise des Apparates soll an Hand der Skizze 3 erläutert werden.

Die Apparatur besteht aus drei Teilen.

1. Mikroskop mit Okularspektroskop.
2. Normallampe mit Gehäuse.
3. Okularkopf mit Mikrometerverstellung.

Auf den Objektstisch des Mikroskops wird das zu beobachtende Körnchen (F) aufgesetzt. Dieses wird mit Hilfe der Frontlinse (T) und des Okulars (O_1) am Spalt (R_1) abgebildet. Das Okular (O_2) dient als Kollimator, welcher die Lichtstrahlen parallel bündelt. Dieses Strahlenbündel wird durch ein Amici Prisma (P_2) in die zunächst freie Öffnung der Linse (L_1) geleitet, und mit dem — auf unendlich akkomodierten — freien Auge das Spektrum beobachtet. Nach Einsetzen der Linse (L_1) wird das Strahlenbündel in der Ebene (K) gesammelt, wo das reelle Bild des Spektrums erscheint. Dieses Bild wird durch das positive Okular (O_3) vergrößert. In der Nähe des Brennpunktes von (O_3) in der Ebene (K) ist ein Spalt (R_2) angeordnet und in einem Tubus eingebaut. Das Okular (O_3) ist in der Richtung des Spektrums verschiebbar.

Das erwähnte Spektrumbild vom Punkt (F) erscheint in der Hälfte des Spaltes (R_2). In der anderen Hälfte sieht man als Fortsetzung dieses das Spektrum der Normallampe (N). Der Spalt (R_2) schneidet vom Spektrum im Durchschnitt ein Band von 30 Å Breite aus. Mittels einer Mikrometereinstellung — an der 0,1 mm 15 Å entspricht — kann der Spalt (R_2) entlang des Spektrums verschoben werden. Die Eichung der Mikrometereinstellung in Ångström erfolgt mittels der sichtbaren Linien einer Hochdruck-Quecksilberdampf Lampe, bzw. mit der Linie 6708 Å des Lithiums.

Wie bereits oben beschrieben, wird das Bild der Normallampe (N) mit Hilfe der Optik (L_2) und Prisma (P_1) in der anderen Hälfte der Spaltebene (R_1) abgebildet. Die Lichtstärke dieses Bildes wird mit Hilfe einer Irisblende — welche in der Optik (L_2) eingebaut ist — geregelt. Der Öffnungswinkel des Lichtkegels der Optik (L_2) soll so gross sein, dass auch das Photoelement (E) in der Nähe der Eintrittsöffnung belichtet wird. Mit Hilfe eines angeschlossenen Galvanometers (G) kann also auch die Lichtstärke in Spalt (R_1) kontrolliert werden.

Die Messung geht folgendermassen vor sich: mit Hilfe der Mikrometerschraube (M) wird der Spalt (R_2) des Okulars (O_3) über das zu messende Gebiet des Spektrums geschoben und danach die Blende von (L_2) solange geregelt, bis die beiden Spektrumbilder im Spalt gleich hell erscheinen.

3. Messergebnisse

Die Ergebnisse der mit den beschriebenen Apparaturen ausgeführten Messungen sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengefasst. Tabelle 1 enthält die gemessenen elektrischen Daten und Lichtintensitäten dargestellt als Funktion der Temperatur des Kristallkörnchens. Es ist zu erwähnen, dass der Wirkungsgrad der bisher zur Verfügung stehenden SiC-Kristallene Exemplare noch ziemlich schlecht ist. In theoretischer Hinsicht ist die Abnahme des Lichtwirkungsgrades mit der Temperatur zu erwähnen.

TABELLE 1

V = 5 V			V = 8 V			V = 10 V		
T	I	R	T	I	R	T	I	R
C°	μA	k Ω	C°	μA	k Ω	C°	μA	k Ω
180	90	55,5	30	80	100,0	20	250	40,00
190	140	35,7	55	60	133,0	40	230	43,50
235	270	18,7	85	170	47,0	57	235	42,50
250	280	17,9	95	170	47,0	85	285	34,70
295	300	16,7	100	160	50,0	110	600	16,60
320	420	11,9	150	180	44,4	170	775	12,90
330	460	10,8	200	360	22,2	200	1250	8,00
			270	750	10,6	220	1390	7,20
			290	1300	6,1	250	2440	4,10
			310	1650	4,8	275	5100	1,96
						315	100 000	0,10

V = 12 V					
T	I	R	N	L	η
C°	μA	k Ω	W	μLm	$\mu Lm/W$
40	4000	3,00	0,048	0,170	3,54
50	4900	2,46	0,059	0,188	3,18
75	9100	1,32	0,109	0,264	2,42
90	7050	1,70	0,085	0,358	4,21
160	15800	0,76	0,190	0,610	3,21
170	17400	0,69	0,209	—	—
175	20000	0,60	0,240	0,705	2,94
190	28500	0,42	0,342	0,650	1,90
200	46000	0,26	0,552	0,640	1,16
210	51000	0,23	0,612	0,620	1,01
220	89000	0,13	1,070	0,800	0,75
230	200000	0,06	2,400	0,705	0,29
270	266000	0,04	3,200	0,750	0,23

Tabelle 2 enthält die Lichtintensität des Elektrolumineszenzspektrums als Funktion der Wellenlänge. Die nebeneinander geschriebenen Werte sind die Resultate von mehreren unabhängigen Messungen. Es ist ersichtlich, dass die Messgenauigkeit auch bei diesen kleinen Lichtintensitäten noch immer ziemlich gut ist.

TABELLE 2

Wellenlänge	Energie der Lichtquanten	Intensität in willkür. Einh.	Wellenlänge	Energie der Lichtquanten	Intensität in willkür. Einh.
Å	eV	E	Å	eV	E
6418	1,923	25	5332	2,314	81
6360	1,94	24, 33	5273	2,34	54,4 62
6200	1,99	29,5 37,6	5222	2,363	90,5
6165	2,005	43	5174	2,385	122,5 127,5
6100	2,023	53,5	5127	2,407	96 113
6079	2,03	48	5078	2,43	114,5 122,5
6049	2,04	44, 47	5036	2,45	79,5 86
5952	2,073	47,51	4966	2,485	137
5912	2,087	63,5	4926	2,505	150 169
5876	2,1	60, 65,5	4806	2,568	133,5
5793	2,13	53, 58	4692	2,63	103
5643	2,187	43,5 52,6	4641	2,658	99,6
5566	2,217	63,5	4594	2,687	90
5504	2,424	80,5	4562	2,705	76,5
5436	2,27	81,5	4509	2,737	68
5405	2,287	86,5 93,5	4447	2,775	58 65
5365	2,3	65,5	4384	2,815	52, 62,4

1. G. Szigeti, E. Nagy, Műgyetemi Közlemények, 1, 117, 1948.

2. E. Nagy, MTA Matematikai és Természettudományi Osztályának Közleményei, 1/ 53, 1952.

МИКРОФОТОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫХ КРИСТАЛЛАХ КАРБИДА КРЕМНИЯ

Д. Сигети, Г. Т. Бауэр, Я. Вейсбург

Резюме

Авторами разработан метод и сконструирована измерительная установка, с помощью которой можно снять спектр свечения электролюминесцентных кристаллов, находящихся под микроскопом, точностью пр. (до) $\pm 15\%$.

ÜBER DIE DURCH GLEICHSTROM ANGEREGTE ELEKTROLUMINESZENZ VON SILIZIUMKARBID-KRISTALLEN*

Von

G. SZIGETI

FORSCHUNGSMUSEUM FÜR DIE FERNMEDELTECHNISCHE INDUSTRIE, BUDAPEST

(Eingegangen : 17. II. 1954)

Nach einer kurzen Zusammenfassung der bisherigen Literatur beschreibt der Verfasser seine Untersuchungen und Versuche zur Ausmessung des elektrolumineszenten Spektrums von Siliziumkarbid und zur Bestimmung der Abhängigkeit der elektrischen Eigenschaften dieser Lichterscheinung und des Kristalls von der Temperatur. Auf Grund der Messungen gelangt er zur Folgerung, dass die Lichterscheinung innerhalb der Sperrschicht durch beschleunigte Träger erregte Lumineszenz ist. Als Zentrum der Lumineszenz können die im Kristall vorhandenen, stöchiometrisch überflüssigen Kohlenstoffatome betrachtet werden. Auf Grund der spektralen und elektrischen Messungen war der Verfasser in der Lage, ein Termschema anzugeben.

Im Laufe unserer früheren Untersuchungen [1, 2] haben wir einen Zusammenhang zwischen den dielektrischen Verlusten der verschiedenen Zinksilikate und Zinkberylliumsilikate einerseits und zwischen der photolumineszenten Lichtemission andererseits gefunden.

Bei diesen Stoffen kann man die ohne Belichtung gemessenen dielektrischen Verluste als charakteristisch für ihre Leitfähigkeit betrachten, bzw. kann aus diesen Verlusten auf die Leitfähigkeit der einzelnen Elementarkörner gefolgert werden.

Wir haben gefunden, dass die Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur aus zwei Komponenten besteht. Eine Komponente erwies sich als praktisch unabhängig von der Temperatur, zeigte aber Proportionalität mit der Lumineszenzfähigkeit des Materials. (Mit der Änderung der Aktivatorkonzentration bei demselben Ausgangsstoff, z. B. änderte sich diese Komponente der Leitfähigkeit parallel mit der Lumineszenzfähigkeit [3].)

Die andere Komponente der Leitfähigkeit wuchs aber sehr schnell mit steigender Temperatur. Für dieses Anwachsen der Leitfähigkeit fanden wir folgenden Ausdruck :

$$\sigma = \sigma_0 + A \exp (-E/kT).$$

Es wurde bei denselben Materialien im Falle von Ultravioletterregung auch die Temperaturabhängigkeit der emittierten Photonen geprüft, und es wurde gefunden, dass, solange die Leitfähigkeit des Materials von der Temperatur

* Vorgetragen am I. Ungarischen Physikerkongress, Budapest, 1953, und auszugsweise an der Conference on Luminescence in Cambridge, 1954.

unabhängig ist, auch der Wirkungsgrad der Lumineszenz praktisch als unverändert betrachtet werden kann.

Wurde aber mit der Temperatur jener Wert erreicht, bei welchem der steile Anstieg der Leitfähigkeit begann, so fanden wir, dass das Licht der Lumineszenz stark zu sinken begann. Wenn wir die Anzahl der emittierten Photonen

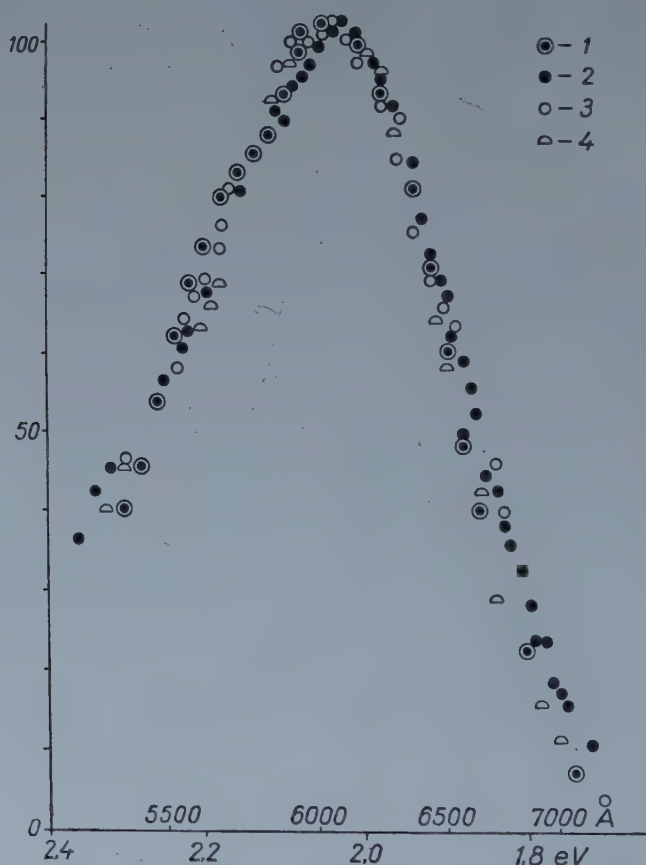


Abb. 1. Absorptionskoeffizient einer Kaliummanganatlösung als Funktion der Wellenlänge (Kurve 1) und die Emissionsspektren verschiedener mit Mangan aktivierter Leuchtstoffe. (Kurve 2 und 3 Zinkberylliumsilikate, Kurve 4 Zinkborat)

für die Lichtintensität als charakteristisch betrachten, so können wir den folgenden Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Änderung der Anzahl der emittierten Photonen aufschreiben:

$$N = N_0 \frac{1}{1 + C \exp(-E/kT)}.$$

Diese Formel etwas umgestaltet ergibt :

$$E = -kT \ln \frac{N_0 - N}{CN}.$$

Wir halten es für notwendig zu bemerken, dass in den — für die Erhöhung der Leitfähigkeit, bzw. für die Schwächung des Lichtes — gefundenen beiden Ausdrücken die Aktivierungsenergie die gleiche ist.

Auf Grund unserer früheren Beobachtungen möchte ich noch auf eine andere, von uns erkannte Gesetzmässigkeit hinweisen [5, 6]. Bei der Prüfung von Spektren verschiedener Manganverbindungen haben wir merkwürdigerweise gefunden, dass die Form und der Platz der Spektralbande im Absorptionsspektrum der verschiedenen Lösungen von Manganationen (MnO_4) mit der orangeroten Emissionslinie der Zinkberylliumsilikate und vieler anderer mit Mangan aktivierten fluoreszenten Materialien vollkommen übereinstimmen (Abb. 1).

Ähnlich konnte man bei mehreren anderen fluoreszenten Verbindungen eine Ähnlichkeit zwischen den Absorptionsbanden der Lösungen oder dünner Schichten des Aktivierungsmaterials und dem Emissionsspektrum der Lumineszenz des aktivierten Materials finden. Wir halten es für wahrscheinlich, dass in solchen Fällen die von dem Raumgitter etwas abgeschirmten Ionengruppen des Aktivators das emittierte Licht erzeugen.

Wir müssen annehmen, dass in solchen Fällen nur ein ganz kleiner Teil der als Aktivator dosierten Manganverbindung während der Glühbehandlung sich in die Form der höheren Valenz verwandelt, da unter normalen Umständen im Leuchtpulver das Absorptionsspektrum der vorausgesetzten Verbindungen nicht wahrnehmbar ist. (In einigen fluoreszenten Pulvern konnte man mit entsprechender Wärmebehandlung erreichen, dass ungefähr der $1/3$ Teil des gesamt dosierten Mangans sich in die Form der höheren Valenz verwandelte. Die Farbe eines solchen Pulvers wird also sehr stark bemerkbar. Da dieses Absorptionsband genau dem emittierten Licht entspricht, leuchten diese Materialien nicht mehr.)

Nach dieser kurzen Zusammenfassung möchte ich die Resultate unserer neuesten Untersuchungen bekanntgeben. Der Ausgangspunkt dieser Versuche war eine Mitteilung des sowjetischen Physikers Lossew vom Jahre 1928 [7,8].

Lossew beobachtete bei Siliziumkarbidkristall, dass durch die Wirkung des Durchflussstromes, in der Nähe des Kontaktes eine Lichterscheinung auftritt. Er nahm das Spektrum dieses Lichtes auf, prüfte die Änderungen dieser Lichterscheinung bei verschiedenen Stromstärken und verschiedenen Stromrichtungen. Zur Zeit seiner ersten Publikation dachte er, dass die Lichterscheinung von den aus dem Kristall mit grosser Geschwindigkeit austretenden Elektronen verursacht wird, welche die Molekeln der umgebenden Luft zum Leuchten

erregen. Später wurde die Erscheinung von *Clauss* geprüft. Er stellte fest, dass es sich hier um eine, von den an der Sperrschicht sich abbremsenden Elektronen erregte, in das optische Gebiet fallende Bremsstrahlung handelt. Deshalb dachten er und auch spätere Verfasser (z. B. *Finkelburg* [9]), dass mit dieser Erscheinung keine praktisch verwendbare Lichtquelle guten Wirkungsgrades verwirklicht werden kann. Die Erscheinung schien jedenfalls sehr interessant zu sein und beschäftigte oft die Forscher, jedoch ohne endgültiges Resultat. In der letzten Zeit erschienen mehrere Publikationen des Signal Corp. Eng. Lab. in den Vereinigten Staaten auf Grund der Ergebnisse der Arbeiten von *Lehovec*, *Accardo* und *Jamgochian* [10, 11, 12]. *Lehovec* und seine Mitarbeiter haben

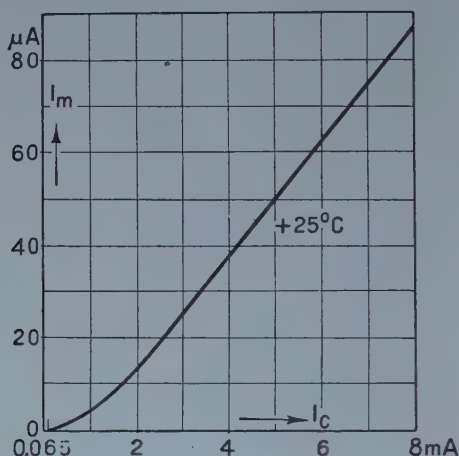


Abb. 2. Lichtstärke als Funktion des erregenden Stromes nach *Lehovec* [12] (I_m = Anodenstrom des Photomultipliers, I_c = Erregerstrom)

die annähernde Spektralverteilung des von dem Kristall emittierten Lichtes mittels Verwendung verschiedener Filtergläser aufgenommen. Sie konnten drei Spektralbanden nachweisen, und zwar mit einem Maximum bei 4750, 5250 und 6100 Å Wellenlängen. (Hier muss ich bemerken, dass infolge der von den Autoren angewandten Methode weder die genaue Form des Spektrums noch die Stelle der Maxima mit genügender Sicherheit bestimmt werden kann.)

Es wurde von ihnen die Änderung des Lichtes als Funktion der Stromstärke untersucht und der Zusammenhang gemäss Abb. 2 gefunden. Ausserdem wurde die Abhängigkeit der Lichtstärke von der Temperaturänderung bei verschiedenen Stromstärken zwischen Zimmertemperatur und -136°C gemessen. Die Ergebnisse dieser Messungen von *Lehovec* und Mitarbeitern sind aus Abb. 3 und 4 ersichtlich.

Vom Standpunkt der weiteren Betrachtungen fand der Verfasser jene Beobachtung der erwähnten Forscher für die wichtigste, laut welcher sich das Licht bei niedriger Temperatur (zwischen Zimmertemperatur und -136°C)

mit der Erhöhung der Temperatur nach einem Exponentialgesetz vermindert. Lehovec und seine Mitarbeiter fanden, dass die Aktivierungsenergie gleich 0,118 eV sei. Bemerkenswert ist ihre Feststellung, laut welcher der Wirkungs-

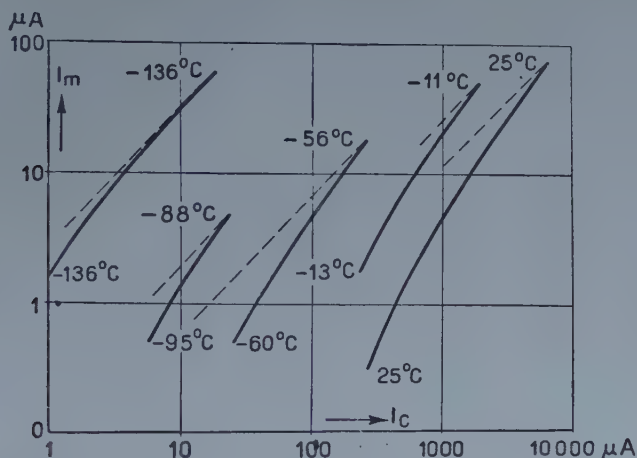


Abb. 3. Lichtstärke als Funktion des erregenden Stromes bei verschiedenen Temperaturen. (Nach Lehovec.)

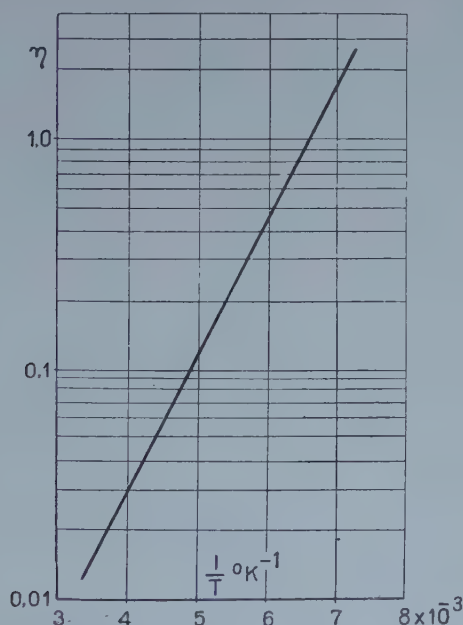


Abb. 4. Wirkungsgrad als Funktion der reziproken Temperatur (η in willkürlichen Einheiten). (Nach Lehovec.)

grad der Lichterregung bei Zimmertemperatur $2,10^{-6}$ Quanten/Elektron beträgt und, die Messpunkte gegen niedrige Temperaturen weiter extrapoliert, der 100%-ige Wirkungsgrad bei etwa 80 K° zu erwarten ist. Weiters haben sie

auch das Nachleuchten der Lichterscheinung geprüft und dabei bemerkt, dass bei niedriger Temperatur das Nachleuchten exponentiell verläuft mit einer Zeitkonstante von $80 \mu \text{ sec.}$, bei Zimmertemperatur haben sie dagegen ein Nachleuchten von $1,15 \mu \text{ sec.}$ gefunden. Auf Grund dieser Untersuchungen schlossen sie, dass der Prozess der Erregung bekannt aus der Theorie der Transistoren durch Injizieren der Träger geschieht, und der Mechanismus der Lichtemission im Grunde mit dem bei den anderen Leuchtstoffen bemerkten Mechanismus identisch ist.

Der letzterwähnte Teil dieser Folgerung unterstützt vollständig unsere eigenen Feststellungen, die wir auf Grund unserer früheren Untersuchungen bereits mitgeteilt haben [13, 14]. Wir fanden, dass kleine Mengen von Verunreinigungen den Wirkungsgrad der Lumineszenz ebenso vermindern, wie es bei den bekannten Phosphoren der Fall ist. In unserer Patentanmeldung vom Jahre 1939 [13] haben auch wir auf die von Lehovec und seinen Mitarbeitern erwähnten schädlichen Einflüsse der Eisenverunreinigung hingewiesen.

Wir haben unsere eigenen Untersuchungen mit zwei verschiedenen Stoffen durchgeführt. Eine Serie haben wir mit von einem durch das Karborundumwerk, Kempten, uns zur Verfügung gestellten Kristallaggregat abgetrennten Kristallen, die andere mit den von uns selbst hergestellten Siliziumkarbidkristallen durchgeführt.

Zwischen zwei beliebige Kristalle des Kristallagglomerates von Kempten haben wir grössenordnungsweise 100 V Spannung geschaltet; einzelne Kristalle des Agglomerates zeigten bei Einschaltung des Stromes grünliches Leuchten. Entsprechend der Stelle des Agglomerates auf der wir die beiden Elektroden anbrachten, leuchteten immer andere Kristalle auf, ohne dass eine bestimmte Gesetzmässigkeit festgestellt werden konnte. Als wir von dem Kristallagglomerat einzelne Kristalle abbrachen und zwischen zwei Nadeln oder zwischen eine Platte und eine Nadel einspannten, wies der Kristall ungefähr bei 6 V Spannung am Ort des Kontaktes eine Lichterscheinung auf. Diese Lichterscheinung war mit der von Lossev beschriebenen identisch. Auch hier zeigte sich die Veränderung der Farbe des Leuchtens bei Austauschen der Pole. Diese Erscheinung ist besonders gut bemerkbar bei einer Zusammenstellung mit zwei Nadeln. In der Umgebung der linken Nadel mit z. B. positiver Polarität zeigt die Lichterscheinung mehr gelbe, in der Nähe der rechten Nadel mit negativer Polarität bläuliche Farbe. Im Falle des Umpolens wechseln beide Erscheinungen. Wir haben bemerkt, dass bei solchen Kristallen, welche reiner sind (weniger farbig erscheinen) zur Erreichung der gleichen Lichtintensität eine geringere Stromstärke notwendig war. Auf Grund dieser Beobachtung haben wir angenommen, dass der Wirkungsgrad dieser Erscheinung durch die Reinheit der Kristalle stark beeinflusst werden kann.

Wir haben demgemäss versucht, möglichst reine Siliziumkarbidkristalle selbst herzustellen. Demzufolge glühten wir spektroskopischen Zwecken die-

nende, sogenannte homogen-gereinigte Kohlenstifte mittels Durchführung elektrischen Stromes. Der Kohlenstab wurde in eine Mischung von Kohle und Kieselsäure eingebettet. Die Kohle erhielten wir durch Verkohlung von Kristallzucker, die Kieselsäure war vorhanden in Form von Pulver, das wir aus dem in unserem Betriebe benutztem Merck purissimum Erzeugnis

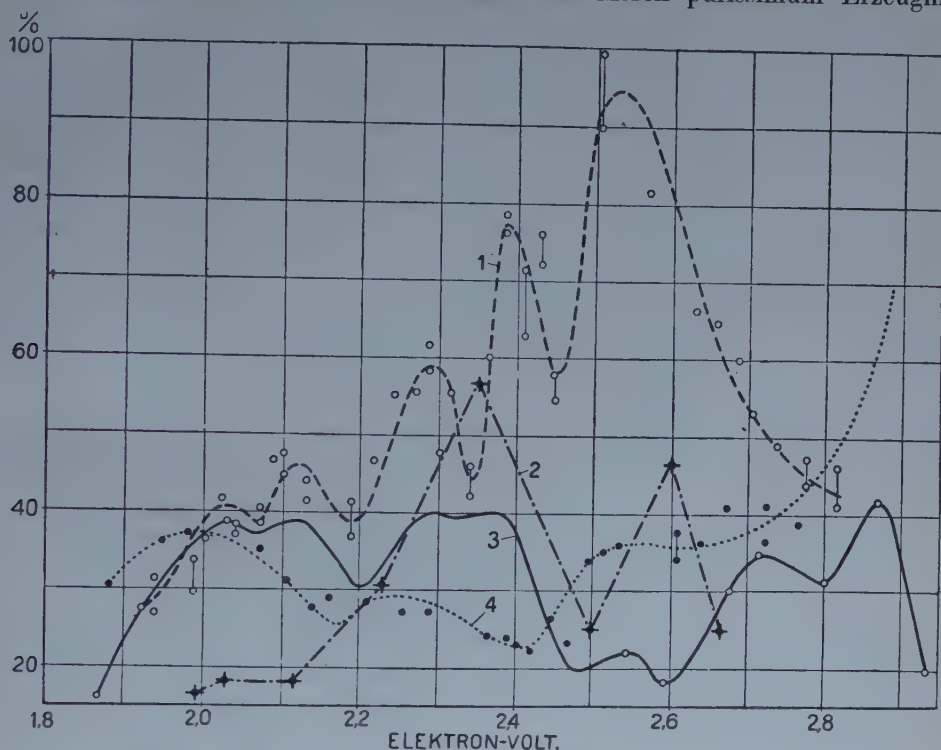


Abb. 5. Zusammenstellung der Emission und Absorptionsspektren von mit Kohle aktivierten Leuchtstoffen.

Kurve 1. Elektrolumineszenzspektren des SiC nach *Szigeti, Bauer, Weisburg* [15]

Kurve 2. Elektrolumineszenzspektren des SiC nach *Lehovec* [12]

Kurve 3. Fluoreszenzspektren des mit Kohle aktivierten Bornitrids nach *Tiede und Tomaschek* [17]

Kurve 4. Absorptionsspektrum desselben SiC wie in Kurve 1.

durch Kochen mit Königswasser reinigten und dann ausglühten. Wir mischten die Kohle und die Kieselsäure so, dass ihr Verhältnis der Reaktion $\text{SiO}_2 + 3\text{C} = 2\text{CO} + \text{SiC}$ entsprach. Das Glühen wurde bis zur Durchbrennung des Kohlenstabes fortgesetzt. Nachher konnten wir aus der Mischung an der Stelle der höchsten Temperatur verhältnismässig viele hellgelbe SiC-Kristalle auswählen. Die Dimensionen der einzelnen Kristallkörner waren von der Grössenordnung von 0,1 mm. Diese Kristalle wurden mikroskopisch untersucht. Wir beobachteten, dass die mit Metallkontakt berührten und auf Metallplatte gestellten mikroskopischen Körner bei etwa einigen Volt Spannung und ungefähr 0,01—0,1

mA Strom in ihrer ganzen Grösse leuchteten, und zwar war die obenerwähnte gelbliche Farbe unabhängig von der Elektrodenpolarität vorherrschend. Wir fanden aber einige Körner, welche von der Polarität ebenfalls unabhängig, jedoch mit der vorher erwähnten bläulichen Farbe leuchteten. Mit der Erhöhung der Spannung änderte sich die Farbe des Lichtes nicht (ebenso, wie es auch bei den Kemptenschen Kristallen gefunden wurde), also im Gegensatze zu der angeführten Annahme von *Klaus* und *Finkelburg* [8], kann die Strahlung keine optische Bremsstrahlung sein. Wurden die einzelnen Körner in Vakuum der Wirkung von Kathodenstrahlen ausgesetzt, dann leuchteten sie dem während des Kontaktes beobachtetem blauen Lichte ähnlich. Die von uns untersuchten Kristalle wiesen bei Einwirkung einer Ultraviolettstrahlung von 2537 Å oder grösseren Wellenlängen, im Gegensatz zur Publikation von *Lehovec*, keine Lumineszenz auf.

Weiters haben wir versucht, zu den Ausgangsmaterialien Mangan zu dosieren in Form von ungefähr 1% MnCO_3 , um zu entscheiden, ob man in Siliziumkarbid ein für Mangan charakteristisches Spektrum erregen kann, wie dies bei verschiedenen Silikaten, Boraten, Phosphaten oder einigen Sulfiden der Fall ist. Dieses Experiment endete mit negativem Resultat, vielleicht deshalb, weil das Mangan im Laufe des Glühprozesses sich verflüchtigte, es ist aber vielmehr wahrscheinlich, dass es in das Siliziumkarbidgitter nicht eingebaut werden konnte.

Im Interesse der genauen Untersuchung der Erscheinung hielten wir es für besonders wichtig, die Aufnahme des Spektrums genauer auszuführen, als dies von *Lehovec* angegeben wurde. Für diesen Zweck hat unser Mitarbeiter, *G. Bauer*, eine Einrichtung zusammengestellt, welche sich im Laufe unserer weiteren Untersuchungen sehr gut bewährt hat. Diese Einrichtung ist an einer anderen Stelle dieser Zeitschrift näher beschrieben [15].

Mittels dieser Einrichtung waren wir in der Lage das Spektrum schon eines einzelnen Körnchens mit ungefähr $\pm 15\%$ Genauigkeit in bezug auf die Lichtintensität aufzunehmen.

Das Elektrolumineszenzspektrum (bläuliches Licht) des Kempten'schen Siliziumkarbids ist in Abb. 5 sichtbar (Kurve 1). Kurve 2 stellt die von *Lehovec* und seinen Mitarbeitern verfertigte Aufnahme des im Siliziumkarbid beobachteten Lichtes dar. Ihre Messpunkte sind mit + angedeutet. Wir sehen also, dass unsere Messung die Feinstruktur des Spektrums bedeutend besser enthüllt. Wenn wir die Lichtintensität als Funktion des Frequenz (resp. des in eV ausgedrückten $h\nu$) darstellen, so bemerken wir an den folgenden Stellen die Maxima :

$h\nu$ in eV	2,535	2,385	2,285	2,125	2,025
Relative Intensität am Ort des Maximums	33,8	26,9	19,8	14,5	12,2

Die Ähnlichkeit dieses Spektrums mit dem von *Tiede* und *Tomaschek* [17] untersuchten durch Kathodenstrahlen erregten Spektrum des mit Kohlenstoff

aktivierten Bornitrids ist wirklich überraschend. Dieses Spektrum ist in Abb. 5 durch die Kurve 3 dargestellt. Wie daraus ersichtlich ist, fallen die bei 2,025, 2,125, 2,285 und 2,385 eV-s erscheinenden Maxima in den Spektren des Bornitrids und des Siliziumkarbids vollkommen zusammen. Bei höheren Frequenzen zeigt sich jedoch keine Übereinstimmung.

Ausserdem haben wir auch das Absorptionsspektrum des unsererseits untersuchten Siliziumkarbidkristalles aufgenommen. Wir haben gefunden, dass bei einer Bestrahlung mit grösserer Energie als 2,90 eV, das Siliziumkarbid vollständig undurchsichtig ist. Gegen niedrigere Frequenzen erschien an den folgenden Stellen ein Absorptionsmaximum: bei 2,68, 2,535, 2,275 eV ein verhältnismässig scharfes und zwischen 1,95 und 2,04 eV ein flaches Absorptionsmaximum. Die kurzwellige Grenze der Absorption stimmt mit den früheren Daten und auch mit den von Lehovc mitgeteilten Werten überein. Im Siliziumkarbid ist also die Breite der verbotenen Bande annehmbar: 2,9 eV, während die dazwischenfallenden kleineren Absorptionsmaxima wahrscheinlich den eingebauten Verunreinigungen entsprechende Energieniveaus bedeuten.

Da die Emissions- und Absorptionsspektren bekannt waren, versuchten wir das Termschema des von uns geprüften Siliziumkarbids (siehe Abb. 6) zusammenzustellen.

Auf Grund des Vorzeichens des Gleichrichtereffektes ist anzunehmen, dass das von uns untersuchte, die erwähnte Lichterscheinung aufweisende Siliziumkarbidkristallexemplar ein Halbleiter von der Type p ist, d. h. dass die Verunreinigungsniveaus oberhalb des Valenzbandes unbesetzt sind.

Mit der grössten Intensität erscheint die Emissionsbande von 2,535 eV, die der im Absorptionsspektrum gefundenen Bande entspricht. Wir können annehmen, dass diese Bande durch einen Übergang vom Grundzustand zu den höchstliegenden Verunreinigungsniveaus entsteht. Ebenso ist die Emissions- und Absorptionsbande von 2,275 eV für einen Übergang vom Grundzustand auf ein höherliegendes Verunreinigungsniveau charakteristisch. Dadurch ist die Stelle der beiden höherliegenden Verunreinigungsniveaus bestimmt. Angenommen, dass den Banden, die sich nur in Emission zeigen und nicht in Absorption, ein Übergang von einem der höherliegenden zwei Verunreinigungsniveaus zu einem niedrigen Verunreinigungsniveau entspricht, müssen wir noch zwei — in der Nähe des Grundzustandes — bei 0,15 und 0,25 eV liegende Verunreinigungsniveaus voraussetzen. Wenn wir diese Niveaus aufzeichnen und die unter denselben möglichen Übergänge prüfen, so bekommen wir interessanterweise den Stellen aller in Emission erscheinenden Banden entsprechende Werte. Das Termschema gibt keine Erklärung für die Absorptionsbanden 2,68 und 1,95–2,04 eV.

Wenn wir die Form des Fluoreszenzspektrums des mit Kohle aktivierten Bornitrids mit dem Elektrolumineszenzspektrum des Siliziumkarbids vergleichen und die in der Einleitung im Zusammenhange mit den Manganverbindungen geschilderte Analogie in Betracht ziehen, so erscheint die Annahme sehr ver-

lockend, dass im Siliziumkarbid bei dem blauen Leuchten stöchiometrisch überflüssige Kohlenstoffatome als Aktivator dienen. Diese Annahme scheint auch noch dadurch begründet zu sein, dass unter den Siliziumkarbidkristallen verschiedener Herkunft und von verschiedenen Stoffen verunreinigt, man immer solche Exemplare finden konnte, welche die geschilderte, charakteristische bläuliche Lumineszenz aufwiesen.

Die Farbe des Spektrums wurde durch Veränderung der Menge der Verunreinigung nicht beeinflusst, die Erhöhung der Menge der Verunreinigungen im allgemeinen verminderte aber bedeutend die Lichtintensität.

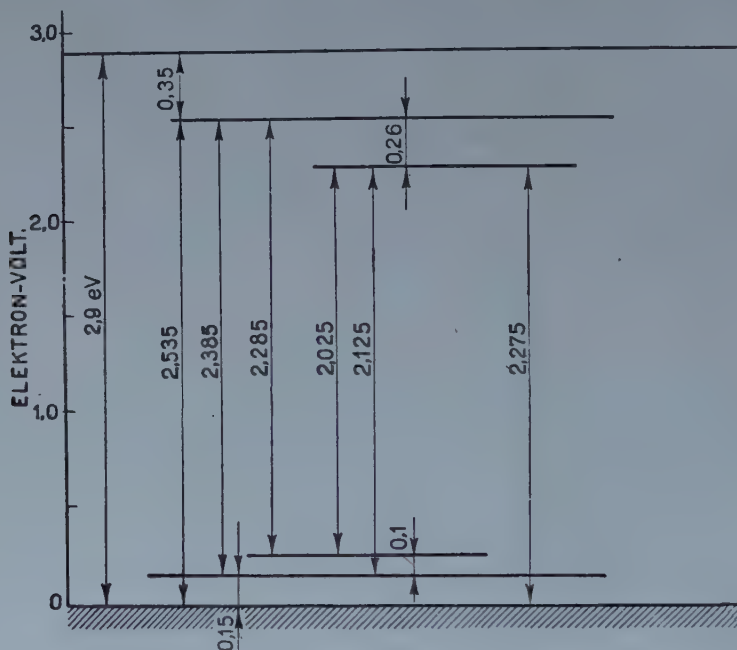


Abb. 6. Termschema der Elektrolumineszenz von SiC

Betreffs des Mechanismus der Lumineszenz können wir annehmen, dass die Erregung auf die von Lehovc geforderte Weise, durch Injizieren der Träger, im gegebenen Falle der Elektronen, in das Konduktionsband geschieht. Die Lichtemission entsteht auf solche Weise, dass die injizierten Elektronen in eine der beiden oberen Verunreinigungsbande (2,535 und 2,275 eV) geraten. Sie kommen von hier entweder durch einen Übergang ohne Ausstrahlung in den Grundzustand bzw. in eines der beiden unteren unbesetzten Verunreinigungsniveaus zurück, oder sie fallen mit Emission einer Strahlung entsprechender Wellenlänge in einen der niedrigeren Zustände zurück.

Wenn dieser Mechanismus richtig ist, so müssen die unteren Verunreinigungsniveaus bei Erhöhung der Temperatur durch die von dem Valenzbande

hingelangten Elektronen besetzt werden, d. h. bei niedrigen Temperaturen müsste das Licht der Aktivierungsenergie von ungefähr 0,16 resp. 0,25 eV entsprechend von der Temperatur sich abhängen.

Lehovec untersuchte die Änderung des Lichtes zwischen Zimmertemperatur und -136°C und fand eine Aktivierungsenergie von 0,118 eV.

Die elektrische Leitfähigkeit des Siliziumkarbids wurde von *Braun* und *Busch* [16] untersucht. Sie fanden, dass die Leitfähigkeit nach der Formel $\sigma(T) = a T^{-n} \exp(-\Delta B/2kT)$ von der Temperatur abhängt. Die Aktivationsenergie ist $\Delta B = 0,3$ bzw. 2,3 eV.

Ähnlich unseren in der Einleitung erwähnten Untersuchungen haben wir versucht, einen Zusammenhang zwischen der Lichtintensität der Lumineszenz und der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes zu finden. Zu den Messungen benutzten wir eine von unserem Mitarbeiter *J. Weiszburg* verfertigte Einrichtung [15].

Es ist noch zu erwähnen, dass wir mittels der beschriebenen Einrichtung nicht den Widerstand des Kristallkörpers untersuchten; wir konnten nur die Widerstandsverhältnisse der für die Lichterregung massgebenden Berührungsstelle mit der Lichterregung gleichzeitig nachprüfen. Wir haben die Widerstandsmessungen in mehreren Serien, immer bei konstanter Spannung fortgesetzt. Während des Messens haben wir in allen Fällen bei unveränderter Spannung die Temperatur zwischen den gewünschten Grenzen variiert und die durch den Kristall fließende Strom- und Leuchtstärke gemessen.

Zur Deutung der Messergebnisse haben wir dieselben auf die in Abb. 7 ersichtliche Weise dargestellt. Als Abszisse haben wir den Reziprokwert der absoluten Temperatur, als Ordinate den Logarithmus des Widerstandes aufgetragen. Zwecks Vergleichbarkeit der Aktivierungsenergien haben wir auf dieselbe auch die Funktion

$$y = -\log \left(\frac{\eta_{\max}}{\eta} - 1 \right)$$

aufgezeichnet, wo η_{\max} den höchsten gemessenen Wirkungsgrad in Lumen/Watt und η den bei der betreffenden Temperatur beobachteten Wirkungsgrad bedeutet.

In dem gewählten Koordinatensystem gibt die Steilheit der Kurve die Aktivierungsenergie der Temperaturabhängigkeit der Photonenzahl an.

Wir sehen, dass die für die Widerstandsänderung charakteristischen Kurven mit den für den Wirkungsgrad des Lichtes charakteristischen Kurven parallel verlaufen. Bei niedrigeren Temperaturen ergibt sich eine Aktivierungsenergie von etwa 0,2 eV, sie stimmt also grössenordnungsgemäss mit den von Lehovec für die Lichterregung und von Busch für den Widerstand im Verunreinigungs-

leitfähigkeitsgebiet gefundenen Aktivierungsenergien überein. Diese Aktivierungsenergie ist mit dem in Abb. 6. dargestellten Termschema sehr gut erklärbar. Die Elektronen gelangen nämlich aus dem Valenzband mit derselben Aktivie-

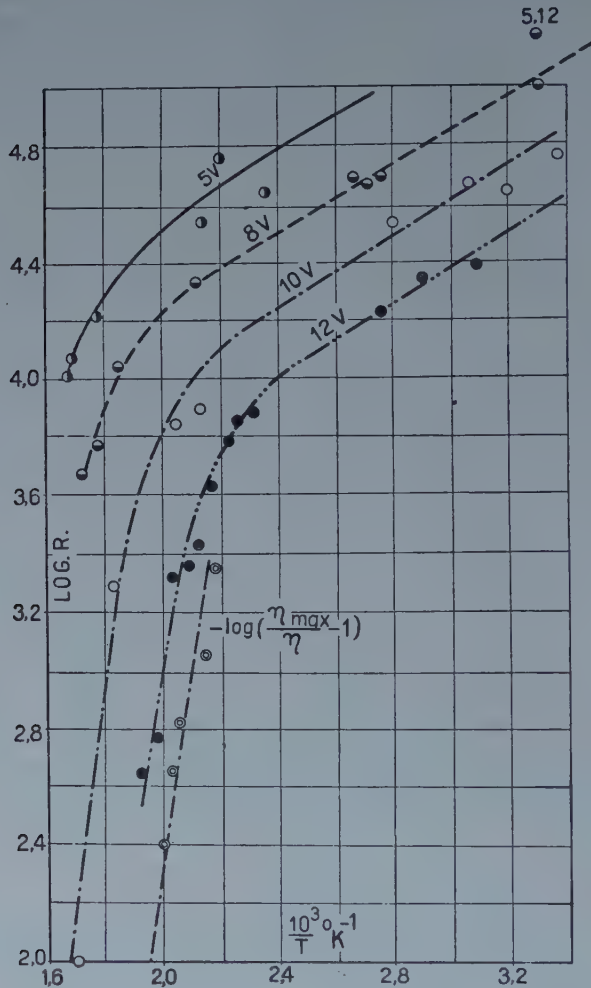


Abb. 7. Änderung des Widerstandes (R), des Wirkungsgrades (η) und der Elektrolumineszenz als Funktion der reziproken Temperatur

rungsenergie auf die in der Höhe von 0,15 resp. 0,25 eV liegenden Akzeptorniveaus.

Die Anzahl der im Valenzband leer gebliebenen Löcher ergibt die bei niedrigen Temperaturen erscheinende Leitfähigkeit. Dementsprechend, in welchem Grade die zulässigen Zustände an den unteren Akzeptorniveaus besetzt werden, vermindert sich auch die Wahrscheinlichkeit der von den höheren

Niveaus entstammenden Übergänge. Dieser Umstand kann bei niedriger Temperatur die bei Erhöhung der Temperatur beobachtete Verminderung des Lichtes erklären.

1. G. Szigeti : Elektrotechnika, **39**, 61, 1947.
2. G. Szigeti—Nagy : Nature, **160**, 641, 1947.
3. E. Nagy : J. Opt. Soc. Am. **39**, 42, 1949.
4. G. Szigeti : Magy. Tud. Akad. Mat. és Term. Tud. Oszt. Közl. **1**, 30, 1951.
5. G. Szigeti—E. Nagy—E. Makai : J. Chem. Phys. **15**, 881, 1947.
6. E. Makai : Journ. Electrochem. Soc. **95**, 107, 1949.
7. O. V. Lossev, Phil. Mag. **6**, 1024, 1928.
8. O. V. Lossev, Phys. Zschrift, **32**, 695, 1931.
9. W. Finkelburg, Kontinuierliche Spektren, J. Springer, 1938, 91.
10. K. Lehovec, C. A. Accardo, E. Jamgochian, Phys. Rev. **82**, 330, 1951.
11. K. Lehovec, C. A. Accardo, E. Jamgochian, Phys. Rev. **83**, 603, 1951.
12. G. Lehovec, C. A. Accardo, E. Jamgochian, Phys. Rev. **89**, 20, 1953.
13. Ungarisches Patent No. 140547 angem.: 23, X. 1939. USA Patent No. 2 254 957 (Z. Bay, G. Szigeti)
14. G. Szigeti : Magy. Tud. Akad. Műsz. Oszt. Közl. **4**, 139, 1952.
15. G. Szigeti, G. T. Bauer, J. Weisburg : Acta Phys. Hung. **4**, 57, 1954.
16. A. Braun und G. Busch : Helvetica Phys. Acta, **18**, 251, 1945.
17. E. Tiede, H. Tomaschok : Z. anorg. u. allg. Chem. **147**, 111, 1925.

ОБ ЭЛЕКТРОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ КРИСТАЛЛОВ КАРБИДА КРЕМНИЯ, ВОЗБУЖДЕННОЙ ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Д. Сигети

Резюме

После краткого обзора литературы дано описание исследований по измерению спектра электролюминесценции карбида кремния и по определению зависимости свечения и электрических свойств кристалла от температуры. На основании результатов измерений сделано заключение, что свечение является люминесценцией, возбужденной носителями тока, ускоренными в запиорном слое. Центрами люминесценции можно считать атомы углерода, присутствующие в кристалле в количестве больше стехиометрического состава. В результате спектральных и электрических измерений предложена схема спектральных уровней.

DIE THEORIE DER SCHWINGUNGEN DER AUF EINEN TORSIONSdraHT AUFGEHÄNGTEN WAAGE NACH EÖTVÖS-SELÉNYI

Von

G. GYÖRGYI

ZENTRALFORSCHUNGSINSTITUT FÜR PHYSIK, BUDAPEST

(Vorgelegt von K. F. Novobátzky—Eingegangen: 6. III. 1954)

Nach der Beschreibung der von *Selényi* modifizierten Eötvösschen Drehwaage und der durch sie ermöglichten Kontrolle der Wirkung der Erdrotation gibt der Verfasser die mathematische Erklärung der bei diesem Versuch auftretenden störenden Erscheinung. Es werden die Bedingungen berechnet, bei denen diese störende Wirkung im Vergleich zu der zu messenden verschwindend klein ist und durch genaue Einstellung des Apparates ausgeschaltet werden kann.

Zum Nachweis der infolge der Erdrotation auf die sich bewegenden Körper wirkenden Corioliskraft wandte *Eötvös* in seiner bereits als klassisch anzusehenden Arbeit [1] eine Waage an, die sich um eine vertikale Achse drehte. In seiner unter [2] zitierten Abhandlung schlug *Selényi* eine Modifikation dieser Einrichtung laut Abb. 1 vor.

Demgemäss hängt die Waage mit horizontaler Achse an einem vertikalen Torsionsdraht. Der Waagebalken kann also in der horizontalen Ebene (anstatt einer Drehbewegung) Drehschwingungen ausführen und unabhängig davon ausserdem in der vertikalen Ebene auch um die Waagenachse schwingen. Über ihre Wirkungsweise kann man sich am leichtesten einen Begriff machen, wenn wir uns auf dem Äquator stehend und den Waagebalken in nord-südlicher Richtung befindlich vorstellen. Versetzt man nun den Waagebalken mit einer kleinen Auslenkung in Schwingung, so wird er offensichtlich denselben Wirkungen ausgesetzt sein wie ein im Polargebiet aufgehängter Foucaultscher Pendel. Wenn man den Ausschlagwinkel der Drehschwingungen mit β und die Waageschwingungen in der vertikalen Ebene mit ε bezeichnet, dann erhält man folgende Gleichungen für die Bewegungen des Waagebalkens [2] (zum Hervorrufen der Resonanz wird hier die Eigenfrequenz der zwei Freiheitsgrade des Schwingungssystems als gleich angenommen):

$$\ddot{\beta} + 2\Omega_0 \dot{\varepsilon} + \omega_0^2 \beta = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{\varepsilon} - 2\Omega_0 \dot{\beta} + \omega_0^2 \varepsilon = 0.$$

Hier bedeuten Ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und ω_0 die Eigenkreisfrequenz des Schwingungssystems. Diese Differentialgleichungen

beziehen sich auf jenen von *Selényi* beschriebenen idealen Fall, wo die Kante des Waagebalkens streng horizontal ist; ihre Lösungen beschreiben — in Übereinstimmung mit der Erfahrung — die Verdrehung der Schwingungsebene mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_0 .

Die Bedeutung der von *Selényi* vorgeschlagenen Modifikation der Eötvös-schen Drehwaage besteht darin, dass man mit dieser modifizierten Einrichtung nachprüfen kann, ob die beobachteten Erscheinungen tatsächlich die Folge

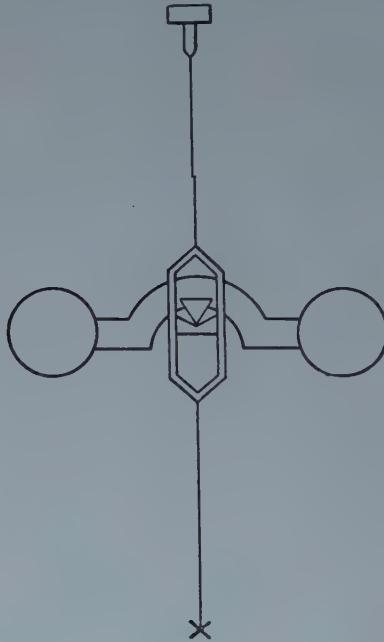


Abb. 1

der Erdrotation sind und nicht etwa infolge irgendeiner Störwirkung auftreten. Ein weiterer wichtiger Vorteil der modifizierten Einrichtung gegenüber der ursprünglichen ist, dass die Rolle des dort gebrauchten teuren Präzisionsuhrwerks hier vom Torsionsdraht übernommen wird.

Der obenerwähnte Kontrollversuch geschieht derart, dass man den Balken der auf dem Äquator gedachten Waage nicht aus der nord-südlichen, sondern aus der west-östlichen Ruhelage auslenkt. Die Schwingungen mögen in der horizontalen Ebene vor sich gehen. In diesem Falle werden die Bewegungen der an die Enden des Waagebalkens befestigten Massen m — bei kleinen Ausschlägen — in nord-südlicher Richtung erfolgen, wird die Geschwindigkeit \vec{v} der Massen ungefähr parallel zur jener der Rotationsachse der Erde sein und so die auf sie wirkende Corioliskraft

$$2m[\vec{v} \times \vec{\Omega}_0] \quad (2)$$

Null betragen. In diesem Falle behält die Waage zwangsläufig ihre Schwingungsebene bei. Nach der Mitteilung von *Selényi* wurde der erste Orientierungsversuch mit der ursprünglich von *Eötvös* benutzten Waage in der Weise durchgeführt, dass die ganze Waage auf einen Torsionsdraht aufgehängt wurde. Danach wurde dafür Sorge getragen, dass die Perioden der Drehschwingungen und der Schwingungen des Waagebalkens miteinander übereinstimmten und schliesslich wurden die Drehschwingungen durch eine Verdrehung des Torsionskopfes ausgelöst. Tatsächlich trat dann die erwartete Wirkung ein: der Waagebalken geriet in Schwingungen um seine Kante, doch in einem weit grösseren Ausmass, als man dies erwarten durfte und auch dann, als sich die Ruhelage des Waagebalkens in west-östlicher Richtung befand, als also keine Corioliskraft auftrat.

Im Laufe der Untersuchungen stellte sich dann heraus, dass die Ursache hierfür darin bestand, dass der Torsionsdraht und die Waagenachse, die im Laufe der Berechnungen als vertikal betrachtet wurden, in Wirklichkeit einen etwas von $\pi/2$ abweichenden Winkel einschlossen. Dieser Umstand bewirkte eine Kopplung zwischen den zwei Freiheitsgraden des Schwingungssystems.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist die mathematische Beschreibung dieser störenden Erscheinung. Auf Grund der hier abgeleiteten Ergebnisse sollen die Bedingungen angegeben werden, bei welchen die störende Wirkung verschwindend klein im Vergleich zu der zu messenden Wirkung ist.

Es sei nun die auf einen senkrechten Torsionsdraht aufgehängte Waage betrachtet, deren Achse mit der horizontalen Ebene einen kleinen Winkel γ einschliesst. Die Lage des Waagebalkens sei auch jetzt mit dem Winkel β der Drehschwingungen und dem Winkel ε der Waageschwingungen gekennzeichnet, wobei aber diesmal die beiden Schwingungsebenen nicht senkrecht aufeinander stehen, sondern den Winkel $\pi/2 + \gamma$ einschliessen.

Bewegt sich der Waagebalken in der horizontalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\beta}$, so beträgt sein Drehimpuls $\Theta\dot{\beta}$. (Θ bezeichnet das auf den Torsionsfaden bezogene Trägheitsmoment des Waagebalkens.) Die Komponente $-\Theta\dot{\beta} \sin \gamma$ des Drehimpulses ist senkrecht zur Ebene der Waageschwingungen (Abb. 2). Laut des Erhaltungssatzes des Drehimpulses muss bei der Entstehung einer Bewegung von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\beta}$ in der Ebene der Schwingungen ε der Drehimpuls $\Theta\dot{\beta} \sin \gamma$ auftreten. Das Erscheinen dieses Drehimpulses steht im Zusammenhang mit einem Drehmoment $\Theta\ddot{\beta} \sin \gamma$.

Die Bewegungsgleichung der Schwingungen ε sei

$$\Theta\ddot{\varepsilon} = -D\varepsilon, \quad (3)$$

wo $D = Mgs$ betragen würde (M ist die Masse des Waagebalkens, s der Abstand des Schwerpunktes von der Kante des Waagebalkenlagers), wenn die zwei Freiheitsgrade unabhängig voneinander wären. So aber muss neben dem zurück-

treibenden Drehmoment $-D \varepsilon$ auch das infolge der Achsenschiefe auftretende Glied $\Theta \ddot{\beta} \sin \gamma$ in Betracht gezogen werden. Die Bewegungsgleichung lautet also :

$$\Theta \ddot{\varepsilon} = -D \varepsilon + \Theta \ddot{\beta} \sin \gamma ,$$

oder wenn man die Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{D/\Theta}$ einführt :

$$\ddot{\varepsilon} - \ddot{\beta} \sin \gamma + \omega_0^2 \varepsilon = 0 . \quad (4a)$$

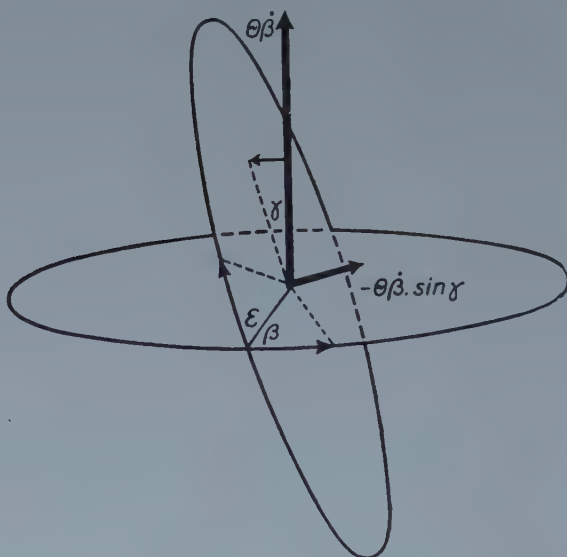


Abb. 2

Diese Überlegung könnte bei einem Rollentausch von ε und β wiederholt werden, wonach man den der vorigen Gleichung ähnlichen Ausdruck

$$\ddot{\beta} - \ddot{\varepsilon} \sin \gamma + \omega_0^2 \beta = 0 \quad (4b)$$

erhalten würde.

Diese Differentialgleichung beschreibt gekoppelte Schwingungen, doch weicht das vorliegende Problem insofern von den bisher in der Literatur behandelten gekoppelten Schwingungen ab, als hier die Kopplung durch die Winkelbeschleunigung hervorgerufen wird und nicht durch den Ausschlag oder durch die Winkelgeschwindigkeit, wie in den bekannten Fällen.

Die Lösung, welche die gegebenen Anfangsbedingungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} - \ddot{\beta} \sin \gamma + \omega_0^2 \varepsilon &= 0 , \\ \ddot{\beta} - \ddot{\varepsilon} \sin \gamma + \omega_0^2 \beta &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

befriedigt, kann am zweckmässigsten mit der Laplace-Transformation gefunden werden.

Die Laplace-Transformierte der Funktion ε sei mit e , die der Funktion β mit b bezeichnet:

$$e(p) = L[\varepsilon(t)] = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-pt} dt, \quad b(p) = L[\beta(t)] = \int_0^{\infty} \beta(t) e^{-pt} dt.$$

Die Waage sei nun im Momente $t = 0$ aus der horizontalen Ebene um den Winkel α ausgelenkt und dann ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Die Anfangsbedingungen sind demnach:

$$\begin{aligned} \beta(0) &= \alpha, & \dot{\beta}(0) &= 0, \\ \varepsilon(0) &= 0, & \dot{\varepsilon}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Unser Gleichungssystem geht nun nach Durchführung der Transformation in folgendes Gleichungssystem über:

$$\begin{aligned} (p^2 + \omega_0^2) \cdot e(p) - \sin \gamma \cdot p \cdot b(p) &= -pa \sin \gamma, \\ -\sin \gamma \cdot p^2 \cdot e(p) + (p^2 + \omega_0^2) b(p) &= pa. \end{aligned}$$

Aus diesen Zusammenhängen erhält man durch einfaches Eliminieren:

$$e(p) = -\frac{a}{4} \left[\frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} + \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} - \frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} - \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} \right],$$

und

$$b(p) = \frac{a}{4} \left[\frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} + \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma}} - \frac{1}{p - i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} - \frac{1}{p + i \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma}} \right].$$

Verwendet man den Zusammenhang

$$L^{-1} \left[\frac{1}{p-a} \right] = e^{at},$$

so ergibt sich :

$$\varepsilon = -\frac{a}{2} \left[\cos \left(\frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma} \cdot t \right) - \cos \left(\frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma} \cdot t \right) \right],$$

$$\beta = \frac{a}{4} \left[\cos \left(\frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 + \sin \gamma} \cdot t \right) + \cos \left(\frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin \gamma} \cdot t \right) \right].$$

Durch eine einfache trigonometrische Umgestaltung gelangt man zu

$$\frac{\omega_0}{\cos \gamma} [\sqrt{1 + \sin \gamma} + \sqrt{1 - \sin \gamma}] = \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \cos \frac{\gamma}{2} = \omega \approx \omega_0, \quad (5)$$

$$\frac{\omega_0}{\cos \gamma} [\sqrt{1 + \sin \gamma} - \sqrt{1 - \sin \gamma}] = \frac{\omega_0}{\cos \gamma} \sin \frac{\gamma}{2} = \Omega \approx \omega_0 \frac{\gamma}{2}, \text{ wenn } \gamma \ll 1.$$

Werden nun diese Bezeichnungen eingesetzt, so erhält man die endgültige Form der gesuchten Lösung :

$$\varepsilon = -a \sin \omega t \sin \Omega t, \quad (6)$$

$$\beta = a \cos \omega t \cos \Omega t,$$

d. h., dass auf den Grundschrwingungen mit der Frequenz ω eine Modulation mit der Frequenz Ω auftritt. Diese infolge der Achsenschiefe entstehende Bewegung soll nun mit den infolge der Corioliskraft auftretenden modulierten Schwingungen verglichen werden [2] :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{a} \sin \omega_0 t \cos \Omega_0 t, \\ \bar{\beta} &= \bar{a} \sin \omega_0 t \sin \Omega_0 t. \end{aligned} \quad (7)$$

[Diese sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems (1).]

Es ist ersichtlich, dass die nachzuweisende Wirkung der Corioliskraft die Modulation der Schwingungen mit einer Frequenz Ω_0 ist. Will man erreichen,

dass die durch die Achsenschiefe hervorgerufene Modulation deren Beobachtung nicht störe, so muss die Periode der letzteren Wirkung wesentlich grösser sein als die der Erddrotation

$$\Omega \ll \Omega_0 ,$$

oder im Falle von $\gamma \ll 1$, wenn man die Näherung (5) verwendet :

$$\gamma \ll 2 \frac{\Omega_0}{\omega_0} . \quad (8)$$

Zum gleichen Ergebnis führt auch die folgende, von *Selényi* angewandte einfache Überlegung, deren Richtigkeit durch die Übereinstimmung mit dem durch exakte Berechnung ermittelten Resultat bewiesen wird.

In der Gleichung (1) wird die Wirkung der Corioliskraft durch das Glied

$$2\Omega_0 \dot{\epsilon}$$

ausgedrückt. Die Wirkung der schiefen Waagenachse kommt dagegen in der Gleichung (4) durch das Glied

$$\ddot{\epsilon} \sin \gamma$$

zum Ausdruck. Es sei angenommen, dass beide Gleichungssysteme periodische Lösungen mit der Frequenz ω_0 geben. In diesem Falle kann man der Grössenordnung nach schreiben, dass

$$\ddot{\epsilon} \sim \omega_0 \dot{\epsilon}$$

Zieht man dies in Betracht, so ergibt sich, dass die Störung im Vergleich zur Corioliskraft dann verschwindend klein sein wird, wenn

$$\omega_0 \sin \gamma \ll 2\Omega_0$$

oder im Falle von $\gamma \ll 1$:

$$\gamma \ll 2 \frac{\Omega_0}{\omega_0} ,$$

was mit dem unter (8) erhaltenen Ergebnis übereinstimmt.

Es betrage z. B. die Schwingungszeit des Waagebalkens 20 sec, d. h. $\omega_0 = 2\pi/20$, dann muss, da ja

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{86400}$$

ist (die Rotationszeit der Erde beträgt bekanntlich 86 400 sec),

$$\gamma < 2 \frac{20}{86\,400}$$

sein, d. h. die Abweichung der Kante von der Horizontalen ist $\gamma < 1/2000$. Diese Genauigkeit kann mit einem entsprechenden Einstellwerk mit Sicherheit erreicht werden.

Es sei hier Herrn Professor *P. Selényi*, korrespondierendem Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, für die Stellung des behandelten Problems und für seine wertvollen Hinweise der aufrichtige Dank des Verfassers ausgesprochen.

LITERATUR

1. *R. Eötvös*, Ann. Physik, **59**, 743, 1919.
2. *P. Selényi*, Acta Phys. Hung. **1**, 75, 1950.

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ ВЕСОВ

(Установка Этвеша—Шеленьи)

Г. Дьёрдьи

Резюме

Исследуется колебание крутильных весов Этвеша—Шеленьи, с помощью которых можно наблюдать силу Кориолиса, действующую на тела, движущиеся на Земле. Если острие коромысла крутильных весов расположено не совсем горизонтально, то возникает некоторая модуляция колебаний, отличающаяся от модуляции, вызванной силой Кориолиса. Этот нежелательный эффект можно сделать достаточно малым точной регулировкой горизонтальности.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

KURZE MITTEILUNGEN — BRIEF REPORTS

BAND-WIDTH PROBLEMS IN THE INVESTIGATION OF RELAXATION PROCESSES

By

GY. GERGELY

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

(Received 5. IX. 1953)

In a previous paper [1] an electronic compensating method was described for investigating relaxation processes, especially for the case of the rise and decay of monomolecular luminescence.

One of the principal problems concerning the compensation method is the band-width [2] i. e. the frequency and phase distortion in the compensating device and in the amplifier of the oscilloscope used for monitoring the procedure of compensation.

The frequency spectra of the pulses on the multiplier's load resistance (light pulses of luminescence) and of the compensating signals may be easily determined by solving the differential equations of the processes by means of operational calculus.

As was described previously, short pulse and square wave excitations were applied for measuring the rise and decay of luminescence. The differential equation governing the relaxation process has the form:

$$\frac{df}{dt} + af = q(t),$$

f denoting the relaxation function e.g. the brightness of luminescence of the compensating voltage, t the time, $\frac{1}{a}$ the mean lifetime of the process, $q(t)$ the excitation of luminescence or the control voltage of the compensating device.

In the course of the measurements q had the following values:

$$\begin{aligned} q(t) &= A = \text{const. if} & 0 < t < \tau, \\ \text{and} & & \\ q(t) &= 0, \text{ if} & \tau < t < \tau + T. \end{aligned}$$

The excitation was periodical with the period $\tau + T$. Solving the differential equation we get:

$$f(t) = -\frac{A}{a} \frac{1 - e^{a\tau}}{(1 - e^{a(\tau+T)})} e^{-at} + \frac{A}{a} \frac{\tau}{\tau + T} + A \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-i\tau K\omega}}{(iK\omega + a)(iK\omega(\tau + T))} e^{iK\omega t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T + \tau}, \quad K = \pm 1, 2, 3, \dots$$

The first term of the solution represents the initial transient process, the second one the direct current component (the average brightness) and the sum gives the complex Fourier series of the process.

In the case of square-wave excitation we have $\tau = T$, and in the stationary state

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \frac{1}{2} \frac{A}{a} - A \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi a K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega K}{a}\right)^2}} e^{i(K\omega t + \varphi_K)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{A}{a} - \frac{2A}{\pi a} \sum_1^{\infty} \gamma_K \cos(K\omega t + \varphi_K), \quad \gamma_K = \frac{1}{K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega K}{a}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\varphi_K = \arctg \frac{a}{K\omega}, \quad K = 1, 3, 5, \dots$$

Investigating Zn_2SiO_4 phosphors, it was found that the luminescence may be described by the superposition of several relaxation processes, its exponents having the magnitudes:

$$\alpha_1 = 10^2, \quad \alpha_2 = 10^3, \quad \alpha_3 = 10^5.$$

For $\omega = 314 \text{ sec}^{-1}$ Table I shows the principal values of γ_K . Using a 25 c — 5 Mc wide-band amplifier, the error — caused by the 5 Mc cut-off of the amplifier — for the most unfavourable case $t = 0$ is given by (K being an odd number)

$$|R| = \left| \frac{2A}{\pi a} \sum_{10^5+1}^{\infty} \frac{1}{K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega K}{a}\right)^2}} \cos \varphi_K \right|.$$

For $\alpha_3 = 10^5$ and $K > 10^5$ (K being an odd or even integer)

$$|R| < \frac{2A}{\pi \omega} \sum_{\frac{1}{2} 10^5+1}^{\infty} \frac{1}{(2K+1)^2} < \frac{2A}{\pi \omega} \int_{\frac{1}{2} 10^5}^{\infty} \frac{dK}{(2K+1)^2},$$

$$|R| < \frac{A}{\pi \omega} \frac{1}{10^5} = \frac{A}{\alpha_3} \frac{1}{\pi \omega} = \frac{A}{\alpha_3} \frac{1}{\pi^2 10^2}.$$

For $\alpha_3 = 10^5$ the error is nearly 0.1%, $\frac{A}{a}$ being the amplitude of a single

relaxation process. In the measurements, a 12 cm diameter oscilloscope was used for monitoring. Taking into account the experimental results published in the paper quoted [1], the error is thus smaller than the line thickness of the oscilloscope trace.

The error caused by the amplifier is much smaller for the luminescence relaxation process I:

$$|R| = \frac{A}{a_1} \frac{1}{\pi^2 10^5}.$$

One of the principal factors limiting the accuracy of luminescence decay measurements lies in the monitoring cathode-ray oscilloscope. Similar difficulties were encountered by *Nottingham* [3] and *Rivkin* [4].

REFERENCES

1. *I. P. Valkó, Gy. Gergely*, Acta Physica Hung. Tom. 1, p. 261 (1952).
2. *П. А. Тольстой, П. П. Феофилов*, Успехи Физических Наук, XLI 1, 44, (1950.)
3. *W. B. Nottingham*, Solid Luminescent Materials (Cornell Symposium) p. 301. John Wiley and Son, N. Y. 1948.
4. *С. М. Ривкин*, Известия Академии Наук, Серия Физическая, XV. 771 (1950).

TABLE I

Cycles	Harmonics	γ_k for	
		Process I	Process III
50	1	1	1
550	11	$8,77 \times 10^{-3}$	$9,1 \times 10^{-2}$
1050	21	$2,41 \times 10^{-3}$	$4,3 \times 10^{-2}$
10 Kc + 1	201	$2,66 \times 10^{-5}$	$4,22 \times 10^{-3}$
100 Kc + 1	2001	$2,77 \times 10^{-7}$	$2,5 \times 10^{-4}$
1 Mc + 1	20001	$2,77 \times 10^{-9}$	$7,97 \times 10^{-7}$
5 Mc + 1	100001	$5,55 \times 10^{-11}$	$3,19 \times 10^{-8}$

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

Kézirat beérkezett: 1954. V. 17. — Terjedelem: 8 (A/5) ív, 26 ábra

31554/54 — Akadémiai Nyomda, V., Gerlőczy-u. 2. — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

Les *Acta Physica* paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des travaux du domaine de la physique.

Les *Acta Physica* sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante :

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement par volume est de 110 forints (\$ 6,50).

On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur des Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The *Acta Physica* publish papers on physics, in Russian, French, English and German.

The *Acta Physica* appear in parts of various size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the *Acta Physica*, is 110 forints (\$ 6,50) a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Die *Acta Physica* veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der Physik in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die *Acta Physica* erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

Acta Physica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 forint (\$ 6,50). Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VI., Sztálin-út 21. Bankkonto: Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Z. Gyulai: P. Selényi	1
P. S. Faragó and G. Groma: Reflex Oscillators. — П. Ш. Фараго и Г. Грома Отражательные осцилляторы	7
+ P. S. Faragó and G. Marx: Quantum Effects in the Interaction between Free Electrons and Electromagnetic Fields. — П. Ш. Фараго и Г. Маркс: Квантовые явления при взаимодействии свободных электронов с электромагнитными полями	23
Th. Neugebauer: Lichtzerstreuung und Hubbleeffekt. — Т. Нейгебауер: Рассе- яние света и эффект Hubble	31
S. N. Biswas: Fredholm Theory of Heitler's Integral Equation. — С. Н. Бисвас: Применение теории Фредголма к интегральному уравнению Гейтлера	49
G. Szigeti, G. T. Bauer, J. Weiszburg: Mikrophotometrische Messungen an elektrolumines- zenten Siliziumkarbidkristallen. — Г. Сигети, Г. Т. Бауер, Я. Вейсбург: Микрофотометрические измерения на электролюминесцентных кристаллах карбида кремния	57
G. Szigeti: Über die durch Gleichstrom angeregte Elektrolumineszenz von Silizium- karbidkristallen. — Г. Сигети: Об электролюминесценции кристаллов карбида, возбужденной постоянным током	65
+ G. Györgyi: Die Theorie der Schwingungen der auf einen Torsionsdraht aufgehängten Waage nach Eötvös—Selényi. — Г. Дьёрдьи: Теория колебания крутиль- ных весов (Установка Этвеша—Шеленьи)	79
Краткие сообщения — Brief Reports — Kurze Mitteilungen	
Gy. Gergely: Band-Width Problems in the Investigation of Relaxation Processes	87